

## Formes Quadratiques

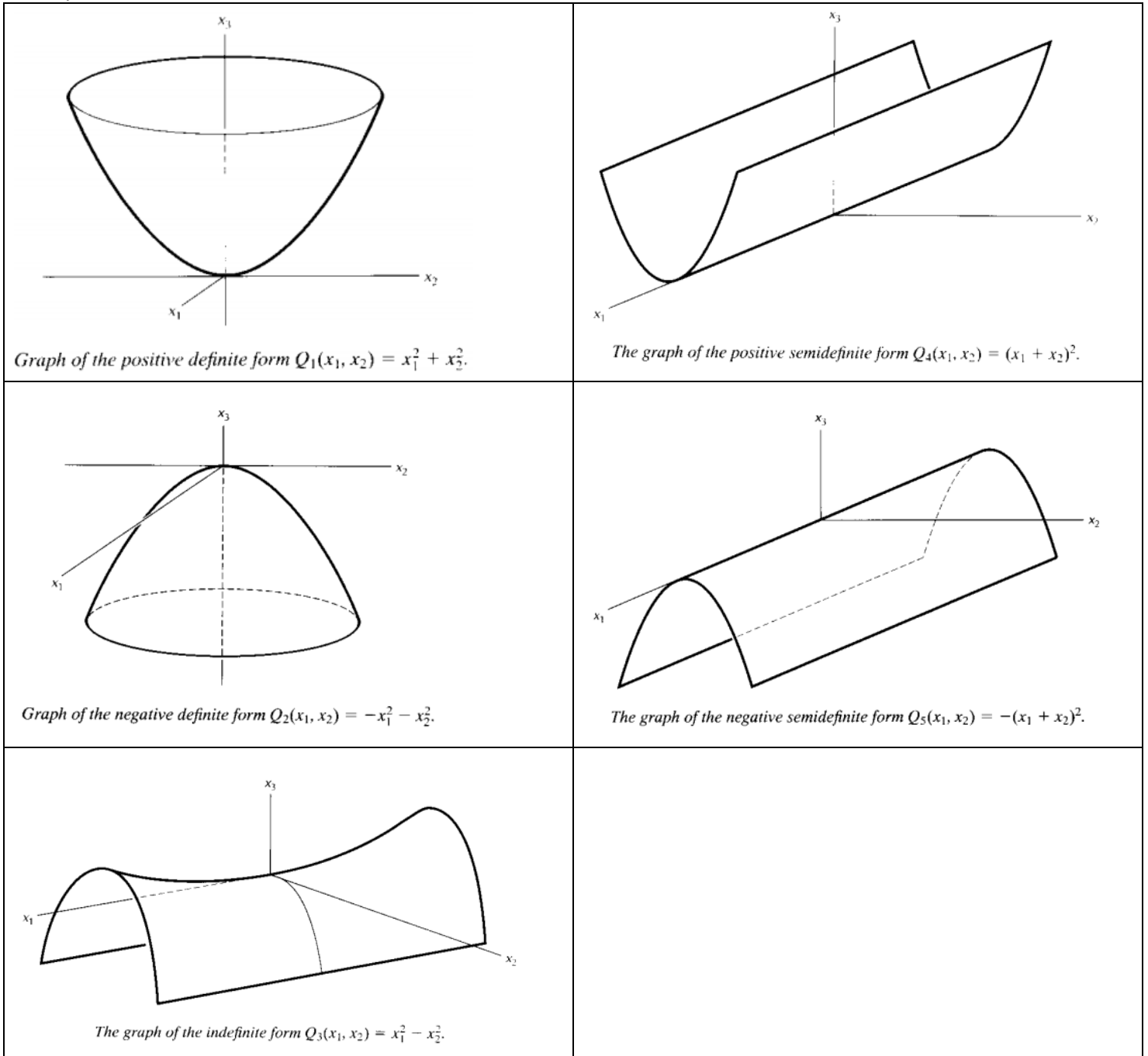
v1.0 Attention il peut y avoir des Errata

Soit une matrice  $A_{n \times n}$  carrée et symétrique et le vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , alors:

- Si  $\forall \mathbf{x} \neq 0$  on a  $\mathbf{x}' A \mathbf{x} > 0 \Rightarrow A$  est **Positive définie**
- Si  $\forall \mathbf{x} \neq 0$  on a  $\mathbf{x}' A \mathbf{x} \geq 0 \Rightarrow A$  est **Positive semi-définie**
- Si  $\forall \mathbf{x} \neq 0$  on a  $\mathbf{x}' A \mathbf{x} < 0 \Rightarrow A$  est **Négative définie**
- Si  $\forall \mathbf{x} \neq 0$  on a  $\mathbf{x}' A \mathbf{x} \leq 0 \Rightarrow A$  est **Négative semi-définie**

- Si  $\mathbf{x}' A \mathbf{x} > 0$  pour un ou des  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{x}' A \mathbf{x} < 0$  pour un ou plusieurs autre(s)  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A$  est **Indéfinie**

### Exemples



Forme	Forme de la fonction	Règles des déterminants des mineurs principaux primaires $m_i^*$ de la matrice Hessienne $H = Hf(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} \right]$ de la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $\mathbf{x}_{n \times 1} \in \mathbb{R}^n$	Type d'extrema ou d'extremum possibles avec le gradient $\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right _{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \mathbf{0}_n$ Ou les dérivées partielles $\left. \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right _{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
Positive définie $\mathbf{x}' A \mathbf{x} > 0$	Convexe strictement	$m_i^* > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$	Minimum stricte
Positive semi-définie $\mathbf{x}' A \mathbf{x} \geq 0$	Convexe	$m_i^* \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$	Plusieurs minima (non strictes)
Négative définie $\mathbf{x}' A \mathbf{x} < 0$	Concave strictement	$(-1)^{i+1} m_i^* < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ ou $m_1^* < 0, m_2^* > 0, m_3^* < 0, m_4^* > 0, \dots$ On a alternance de signe commençant par $< 0$	Maximum stricte
Négative semi-définie $\mathbf{x}' A \mathbf{x} \leq 0$	Concave	$(-1)^{i+1} m_i^* \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ ou $m_1^* \leq 0, m_2^* \geq 0, m_3^* \leq 0, m_4^* \geq 0, \dots$ On a potentiellement alternance de signe commençant par $\leq 0$	Plusieurs maxima (non strictes)
Indéfinie	Point(s) d'inflexion, Points de selle Et autres	Autres	????

Mineurs principaux primaires  $m_i^*$  de la matrice Hessienne  $H = Hf(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} \right]$

$$m_1^* = \det(M_1^*) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_1}$$

$$m_2^* = \det(M_2^*) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2 \partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$m_3^* = \det(M_3^*) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_3 \partial x_3} \end{bmatrix}$$

⋮

$$m_n^* = \det(M_n^*) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

$M_i^*$  est la matrice composée de la sous-matrice prenant les  $i$ -ièmes premières lignes et  $i$ -ièmes colonnes de la matrice Hessienne  $H$ , donc  $M_i^*$  comporte  $i \times i$  éléments.

Ainsi  $m_i^* = \det(M_i^*)$  est le  $i$ -ième **mineur principal primaire**, c'est donc le déterminant de la matrice  $M_i^*$

**Attention** : il ne faut pas confondre le  $i$ -ième **mineur principal primaire** noté  $m_i^* = \det(M_i^*)$  avec le **mineur**  $m_{ij} = \det(M_{ij})$  de la matrice de mineur  $M_{ij}$  qui est construite à partir d'une matrice  $A$  auquel on a enlevé la ligne  $i$  et la colonne  $j$ . Pour éviter la confusion j'ai ajouté un \* lorsque l'on parle de **mineurs principaux primaires**.

Les **mineurs principaux primaires** sont utilisés pour déterminer la forme de la matrice Hessienne dans les problèmes d'optimisation.

Les **mineurs (simples)** sont utilisés pour calculer des déterminants avec l'expansion de Laplace.

Le déterminant d'une matrice carrée  $n \times n$  est une mesure du volume dans  $\mathbb{R}^n$  (d'aire dans  $\mathbb{R}^2$ ) de la forme géométrique construite par les vecteurs qui composent la matrice  $A = [a_{ij}]$ .

Pour  $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  on a la définition suivante

$$\det(A_{2 \times 2}) = |A_{2 \times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = ad - bc$$

Pour  $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  avec la **règle de Sarrus** on a la définition suivante

$$\det(A_{3 \times 3}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Pour le cas général on a avec l'expansion de Laplace

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \dots + a_{in}c_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{ij} \\ &= a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \dots + a_{nj}c_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}c_{ij} \end{aligned} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq n$$

où le cofacteur  $ij$  de  $A$  est le scalaire  $c_{ij}$  défini par  $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$

où  $m_{ij}$  est le mineur  $ij$  de  $A$ , c'est-à-dire le déterminant de la sous matrice de dimension  $(n-1) \times (n-1)$  construite à partir de la matrice  $A$  en enlevant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ . On pourrait noter cette matrice  $M_{ij} = A_{-i,-j}$ .

$$m_{ij} = \det(M_{ij}) = \det(A_{-i,-j}) = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

Notez aussi que la matrice des cofacteurs  $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .