Intra v1.2 Attention il peut y avoir des erratas

Q1 - Nous avons les ensembles suivants qui sont des parties de $\mathbb{R}$. Ici $\mathbb{R}$ est l'ensemble de référence.

$A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{3,4,5\}$ $D = [0,4[$

Donnez les valeurs ou les ensembles associé(e)s aux énoncés suivants (s'ils existent) et justifiez.

a) $\inf(A \cap B) = \inf(\{1,2,3,4\} \cap \{3,4,5\}) = \inf(\{3,4\}) = 3$

b) $\sup(A \cup B^C) = \sup(\{1,2,3,4\} \cup \left(\mathbb{R} \setminus \{3,4,5\}\right)) = \sup(\mathbb{R} \setminus \{5\})$ pas de supremum

c) $D \cap \left(D^C \setminus D\right) = [0,4[\cap\Big(\big((-\infty,0[\cup[4,+\infty)\big) \setminus [0,4[\Big) = [0,4[\cap\big((-\infty,0[\cup[4,+\infty)\big) = \varnothing$

d) $\max D^C = \max\big((-\infty,0[\cup[4,+\infty)\big)$ pas de maximum

e) $A \cap \varnothing = \{1,2,3,4\} \cap \varnothing = \varnothing$

Q2- Calculez les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ forme $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}.$$

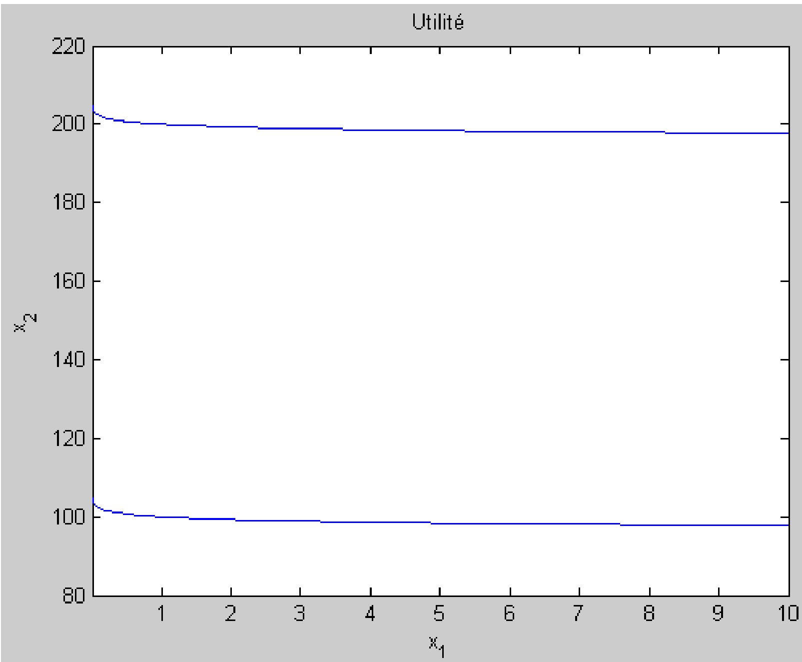
b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 + 5x + 1}{3x^2 - x}$ forme $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 5x + 1}{3x^2 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(4x^2 + 5x + 1)/x^2}{(3x^2 - x)/x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 + 5/x + 1/x^2}{3 - 1/x}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty}(4 + 5/x + 1/x^2)}{\lim\limits_{x \to \infty}(3 - 1/x)} = \frac{4 + 5\lim\limits_{x \to \infty} 1/x + \lim\limits_{x \to \infty} 1/x^2}{3 - \lim\limits_{x \to \infty} 1/x} = \frac{4}{3}.$$

Q3- Tracez les courbes d'indifférence associées à la fonction d'utilité suivante $U(x_1, x_2) = \ln(x_1) + x_2 + 10$ pour des valeurs d'utilité de 110 et de 210. Interprétez vos graphiques. Calculez la différentielle totale de cette fonction d'utilité. Interprétez-la

$$x_2 = U(x_1, x_2) - \ln(x_1) - 10$$



$$dU(x_1, x_2) = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = \frac{1}{x_1} dx_1 + 1dx_2$$

Sur une courbe d'indifférence on a

$$0 = dU(x_1, x_2) = Um_{x_1} dx_1 + Um_{x_2} dx_2 = \frac{1}{x_1} dx_1 + 1dx_2$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{Um_{x_1}}{Um_{x_2}} = -\frac{1 / x_1}{1}$$

Q4- Calculez les différentielles totales des 5 fonctions suivantes.

a) $y = \frac{9x-4}{5x}$

$$dy = \frac{\partial\left(\frac{9x-4}{5x}\right)}{\partial x}dx = \frac{1}{5}\left\{(9x-4)^{1-1}9x^{-1} + (9x-4)(-1)x^{-2}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{9x^{-1} - (9x-4)x^{-2}\right\}dx = \frac{1}{5}\left\{\underbrace{9x^{-1} - 9x^{1}x^{-2}}_{0} + 4x^{-2}\right\}dx = \frac{4}{5x^2}dx$$

b) $y = 3x_1^2 + x_1 x_2^2 + \ln(x_1)\ln(x_3)$

$$dy = \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}dx_3$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + x_1 x_2^2 + \ln(x_1)\ln(x_3)$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} = 3\cdot 2\cdot x_1 + x_2^2 + \frac{\ln(x_3)}{x_1} = 6x_1 + x_2^2 + \frac{\ln(x_3)}{x_1}$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} = 2x_1 x_2$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} = \frac{\ln(x_1)}{x_3}$$

$$dy = \left(6x_1 + x_2^2 + \frac{\ln(x_3)}{x_1}\right)dx_1 + 2x_1 x_2 dx_2 + \frac{\ln(x_1)}{x_3}dx_3$$

c) $y = x_1 e^{(x_1 + x_2^2)}$

$$f(x_1,x_2) = x_1 e^{(x_1 + x_2^2)}$$

$$dy = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}dx_2$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = x_1^{1-1}e^{(x_1+x_2^2)} + x_1\frac{\partial e^{(x_1+x_2^2)}}{\partial x_1} = e^{(x_1+x_2^2)} + x_1 e^{(x_1+x_2^2)}\frac{\partial(x_1 + x_2^2)}{\partial x_1}$$

$$= e^{(x_1+x_2^2)} + x_1 e^{(x_1+x_2^2)}1 = e^{(x_1+x_2^2)} + x_1 e^{(x_1+x_2^2)}$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = x_1 e^{(x_1+x_2^2)}\cdot 2x_2^{2-1} = 2x_1 x_2 e^{(x_1+x_2^2)}$$

$$dy = \left(e^{(x_1+x_2^2)} + x_1 e^{(x_1+x_2^2)}\right)dx_1 + 2x_1 x_2 e^{(x_1+x_2^2)}dx_2$$

d) $y = 10 + 4\ln\left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)$

$$dy = \frac{\partial\left(10 + 4\ln\left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)\right)}{\partial x}dx = \frac{\partial\left(10 + 4\ln x^2 - 4\ln(x^2+2)\right)}{\partial x}dx$$
$$= \left(4\frac{1}{x^2}2x - 4\frac{1}{(x^2+2)}2x\right)dx = \left(\frac{8}{x^2}x - \frac{8}{(x^2+2)}x\right)dx = \left(\frac{16}{x(x^2+2)}\right)dx$$

e) $y = 2x\ln x^2$

$$dy = \frac{\partial\left(2x\ln x^2\right)}{\partial x}dx = \frac{\partial\left(2\cdot 2\cdot x\ln x\right)}{\partial x}dx = 4\frac{\partial\left(x\ln x\right)}{\partial x}dx = 4\left(1\cdot\ln x + x\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= 4\left(\ln x + 1\right)dx = \left(4\ln x + 4\right)dx = \left(2\ln x^2 + 4\right)dx$$

Q5- Donnez le gradient et la matrice Hessienne des fonctions suivantes par rapport à x_1 et x_2

a) $y = \ln(x_1^2 - x_2^2)^{0.5} + 10$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial\left(\ln(x_1^2 - x_2^2)^{0.5} + 10\right)}{\partial x_1} = 0.5\frac{1}{(x_1^2 - x_2^2)}2x_1^{2-1} = \frac{x_1}{(x_1^2 - x_2^2)} = x_1(x_1^2 - x_2^2)^{-1}$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial\left(\ln(x_1^2 - x_2^2)^{0.5} + 10\right)}{\partial x_2} = -0.5\frac{1}{(x_1^2 - x_2^2)}2x_2^{2-1} = -\frac{x_2}{(x_1^2 - x_2^2)} = -x_2(x_1^2 - x_2^2)^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_1}{(x_1^2 - x_2^2)}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1(x_1^2 - x_2^2)^{-1}\right)$$
$$= -1x_1(x_1^2 - x_2^2)^{-2}(-1)2x_2^{2-1} = 2x_1(x_1^2 - x_2^2)^{-2}x_2$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{x_2}{(x_1^2 - x_2^2)}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-x_2(x_1^2 - x_2^2)^{-1}\right)$$
$$= -x_2(-1)(x_1^2 - x_2^2)^{-2}2x_1^{2-1} = 2x_2(x_1^2 - x_2^2)^{-2}x_1$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1(x_1^2 - x_2^2)^{-1}\right)$$
$$= (x_1^2 - x_2^2)^{-1} + (-1)x_1(x_1^2 - x_2^2)^{-2}2x_1 = (x_1^2 - x_2^2)^{-1} - 2x_1^2(x_1^2 - x_2^2)^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-x_2(x_1^2 - x_2^2)^{-1}\right)$$
$$= -(x_1^2 - x_2^2)^{-1} - x_2(-1)(x_1^2 - x_2^2)^{-2}(-1)2x_2 = -(x_1^2 - x_2^2)^{-1} - 2x_2^2(x_1^2 - x_2^2)^{-2}$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1(x_1^2 - x_2^2)^{-1} \\ -x_2(x_1^2 - x_2^2)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1}{(x_1^2 - x_2^2)} \\ \dfrac{-x_2}{(x_1^2 - x_2^2)} \end{bmatrix}$$

$$H(f(x_1, x_2)) = \begin{bmatrix} (x_1^2 - x_2^2)^{-1} - 2x_1^2(x_1^2 - x_2^2)^{-2} & 2x_1(x_1^2 - x_2^2)^{-2}x_2 \\ 2x_1(x_1^2 - x_2^2)^{-2}x_2 & -(x_1^2 - x_2^2)^{-1} - 2x_2^2(x_1^2 - x_2^2)^{-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{(-x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 - x_2^2)^2} & \dfrac{2x_1x_2}{(x_1^2 - x_2^2)^2} \\ \dfrac{2x_1x_2}{(x_1^2 - x_2^2)^2} & \dfrac{(-x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 - x_2^2)^2} \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} -\dfrac{(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 - x_2^2)^2} & \dfrac{2x_1x_2}{(x_1^2 - x_2^2)^2} \\ \dfrac{2x_1x_2}{(x_1^2 - x_2^2)^2} & -\dfrac{(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 - x_2^2)^2} \end{bmatrix}$$

b) $y = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ avec $\alpha + \beta = 1$ et les nombres réel $\alpha, \beta \in]0,1[$

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

$$\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}$$

$$\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}$$

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial\left(\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}\right)}{\partial x_1} = \alpha(\alpha-1) x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta}$$

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial\left(\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}\right)}{\partial x_2} = \beta(\beta-1) x_1^{\alpha} x_2^{\beta-2}$$

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}\right) = \alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1}$$

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}\right) = \alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1}$$

$$\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} \\ \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} \end{bmatrix}$$

$$H(U(x_1, x_2)) = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1) x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta} & \alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1) x_1^{\alpha} x_2^{\beta-2} \end{bmatrix}$$

Q6- À partir de la fonction suivante, déterminez le type de la forme quadratique que l'on a en utilisant la matrice Hessienne. $f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$

$$H = \begin{bmatrix} 12 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -10 \\ -4 & -10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$m_1^* = \det(12) = 2 > 0$$
$$m_2^* = \det\left(\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}\right) = 96 - 4 = 92 > 0$$
$$m_3^* = \det(H) = \text{-}1120 < 0$$

Non-définie

Q7- Optimisation **N.B. :** Vérifiez bien de manière détaillée les conditions de deuxième ordre avec les mineurs principaux primaires m_i^*.

a) On a la fonction réelle suivante $f(x_1, x_2, z) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 + z$, optimisez cette fonction par rapport à x_1 et x_2. Ici z est une variable exogène constante réelle que vous ne pouvez pas déterminer. Donnez les C.P.O. et les C.D.O. Donnez la matrice Hessienne et le type de la forme quadratique que l'on a. Pour le ou les points critiques, trouvez et caractérisez le(s) type(s) d'extremum (extrema) auquel(s) on a droit.

$$\min_{x_1, x_2} f(x_1, x_2, z) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 + z$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, z)}{\partial x_1} = 2(x_1 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = -1$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, z)}{\partial x_2} = 2x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^* = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, z)}{\partial x_1^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, z)}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, z)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$m_1^* = \det(2) = 2 > 0$$

$$m_2^* = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 4 > 0$$

Donc forme positive définie, minimum (dans ce cas global unique).

b) On a la fonction réelle suivante $f(x_1, x_2, x_3) = 30 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, optimisez cette fonction par rapport à x_1, x_2 et x_3. Donnez les C.P.O. et les C.D.O. Donnez la matrice Hessienne et le type de la forme quadratique que l'on a. Pour le ou les points critiques, trouvez et caractérisez le(s) type(s) d'extremum (extrema) auquel(s) on a droit.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 30 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = -2x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 0$$
$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = -2x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^* = 0$$
$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = -2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3^* = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} = -2$$
$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2} = -2$$
$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^2} = -2$$
$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \forall i \neq j$$
$$H = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$m_1^* = \det(-2) = -2 < 0$$
$$m_2^* = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 4 > 0$$
$$m_3^* = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = -8 < 0$$

Forme négative définie donc maximum (dans ce cas global unique).

c) On a la fonction de profits suivante $\pi(L) = 10L^{0.5} - WL$ avec $W = 6$. Maximisez les profits et trouvez le niveau de travail optimal L^*. Donnez les C.P.O. et les C.D.O et vérifiez que l'on a bien un maximum. Interprétez la condition de premier ordre.

$$\max_L \pi(L) = PL^{0.5} - WL$$

$$\frac{\partial \pi(L)}{\partial L} = 0.5PL^{-0.5} - W = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.5PL^{-0.5} = W \quad \Rightarrow \quad \text{Rm=Cm}$$

$$\Rightarrow \quad L^{-0.5} = 2\frac{W}{P}$$

$$\Rightarrow \quad L^* = \left(2\frac{W}{P}\right)^{-2} = \left(\frac{P}{2W}\right)^2 = \left(\frac{10}{2\cdot 6}\right)^2 = \left(\frac{10}{2\cdot 6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{36}\text{=0.694444...}$$

$$\frac{\partial^2 \pi(L)}{\partial L^2} = \frac{\partial(0.5PL^{-0.5} - W)}{\partial L} = -0.5\cdot 0.5PL^{-1.5} = -0.5\cdot 0.5\cdot 10\cdot\left(\frac{25}{36}\right)^{-1.5} < 0$$

donc maximum (dans ce cas global unique).

d) On a la fonction réelle suivante $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 30$, trouvez le ou les point(s) critique(s) associé(s) à cette fonction. Donnez les C.P.O. et les C.D.O. Donnez la matrice Hessienne et le type de la forme quadratique que l'on a. Pour le ou les points critiques, trouvez et caractérisez le(s) type(s) d'extremum (extrema) auquel(s) on a droit si c'est le cas.

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 30$$

$$\underset{x_1, x_2}{opt}\ f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 30$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 6x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -6x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^* = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, z)}{\partial x_1^2} = 6 \qquad \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, z)}{\partial x_2^2} = -6 \qquad \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$m_1^* = \det(6) = 6 > 0$$

$$m_2^* = \det\left(\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}\right) = -36 < 0$$

Forme Indéfinie point de selle

e) On a la fonction réelle suivante $V(x_1, x_2) = 10x_1^{0.25}x_2^{0.5} - 30x_1 - 20x_2$, trouvez le ou les point(s) critique(s) associé(s) à cette fonction. Donnez les C.P.O. et les C.D.O. Donnez la matrice Hessienne et le type de la forme quadratique que l'on a. Pour le ou les points critiques, trouvez et caractérisez le(s) type(s) d'extremum (extrema) auquel(s) on a droit.

$$f(x_1, x_2) = (1 / 10)V(x_1, x_2) = x_1^{1/4}x_2^{1/2} - 3x_1 - 2x_2$$

Le problème se pose de la façon suivante avec une transformation monotone croissante

$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} x_1^{1/4}x_2^{1/2} - 3x_1 - 2x_2 \qquad \text{ou} \qquad \max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} f(x_1, x_2)$$

C.P.O. (condition nécessaire)

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{4}x_1^{-3/4}x_2^{1/2} - 3 = 0 \quad (*)$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{2}x_1^{1/4}x_2^{-1/2} - 2 = 0 \quad (**)$$

à partir de (*) et de (**) on écrit respectivement

$$x_1^{-3/4}x_2^{1/2} = 12 \qquad (*)'$$

et

$$x_1^{1/4}x_2^{-1/2} = 4 \qquad (**)'$$

Maintenant on a va solutionner pour x_1 ou pour x_2 en fonction de l'autre variable. On peut procéder de plusieurs manières dans ce cas particulier (il y a des fois ou on a moins d'alternatives).

On peut diviser une égalité par l'autre (on pourrait aussi isoler un des x dans l'une et substituer dans l'autre)

$$\frac{x_1^{-3/4}x_2^{1/2}}{x_1^{1/4}x_2^{-1/2}} = \frac{12}{4} \qquad \text{ceci donne } \frac{x_2^{1/2-(-1/2)}}{x_1^{1/4-(-3/4)}} = 3 \quad \text{et } \frac{x_2}{x_1} = 3$$

Donc on a une condition d'optimalité reliant x_1 et x_2 au point l'optimal, on a $x_2^* = 3x_1^*$

En substituant ce résultat dans (*)' ou dans (**)' on peut trouver une solution pour x_2^* et x_1^* respectivement qui n'est fonction que de nombres réels.

Substituons $x_2^* = 3x_1^*$ dans (**)'

$$x_1^{1/4}\left(3x_1\right)^{-1/2}=4$$
$$x_1^{1/4}3^{-1/2}x_1^{-1/2}=4$$
$$x_1^{1/4}x_1^{-2/4}=\frac{4}{3^{-1/2}}$$
$$x_1^{-1/4}=4\cdot 3^{1/2}$$
$$\left(x_1^{-1/4}\right)^{-4}=\left(4\cdot 3^{1/2}\right)^{-4}$$
$$x_1^*=\left(4\cdot 3^{1/2}\right)^{-4}=1/2304=0.000434027777777778$$
Et en substituant dans la condition d'optimalité $x_2^*=3x_1^*$ on trouve
$$x_2^*=3x_1^*=3(1/2304)=1/768=0.00130208333333333$$

Avertissement : En classe j'avais utilisé la méthode de transformation par le $\ln$ afin de solutionner le système d'équation à partir de (*)' et de (**)' en prenant le $\ln$ de ces deux équations et en substituant pour trouver x_1^* et x_2^*. On obtiendrait le même résultat. Par ailleurs, Sampson Workbook 1 p137-138 solutionne le système en $\ln$ en utilisant les règles de Cramer, c'est aussi bon. Ici les exposants de la fonction objectif nous permettent de bien travailler par la méthode que l'on a adopté. Mais si on avait à la place $f(x_1,x_2)=x_1^{1/2}x_2^{1/2}-3x_1-2x_2$ par exemple , pour (*)' on aurait $(1/2)x_1^{1/2-1}x_2^{1/2}=3 \Rightarrow x_1^{-1/2}x_2^{1/2}=6 \Rightarrow x_2^{1/2}=6x_1^{1/2} \Rightarrow x_2=36x_1$ et en substituant dans (**)' on aurait pas une solution car (**)' qui serait $x_1^{1/2}x_2^{-1/2}=4$ donnerait
$$x_1^{1/2}x_2^{-1/2}=4$$
$$x_1^{1/2}(36x_1)^{-1/2}=4$$
$$x_1^{1/2}x_1^{-1/2}=4/36^{-1/2}\ .$$
$$x_1^{1/2-1/2}=4/36^{-1/2}$$
$$x_1^0=?????$$
Ainsi ici il faudrait utiliser la méthode du système transformé par le $\ln$. Chaque problème est différent. Plus on en fait, plus on est bon.

Revenons à nos moutons!
Maintenant si la condition nécessaire de premier ordre d'applique, il faut vérifier la condition de deuxième ordre C.D.O. Pour le problème original on a donc.

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right)=-\frac{1}{4}\frac{3}{4}x_1^{-3/4-1}x_2^{1/2}=-\frac{3}{16}x_1^{-7/4}x_2^{1/2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{1}{2}x_1^{1/4}x_2^{-1/2-1}=-\frac{1}{4}x_1^{1/4}x_2^{-3/2}\qquad (**)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{4}x_1^{-3/4}x_2^{1/2}-3\right)=\frac{1}{8}x_1^{-3/4}x_2^{-1/2}$$

Donc la matrice Hessienne donne

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} x_1^{-7/4} x_2^{1/2} & \frac{1}{8} x_1^{-3/4} x_2^{-1/2} \\ \frac{1}{8} x_1^{-3/4} x_2^{-1/2} & -\frac{1}{4} x_1^{1/4} x_2^{-3/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5184 & 1152 \\ 1152 & -58982 \end{bmatrix}$$

On a ainsi

$$m_1^* = \det(M_1^*) = -5184 < 0$$

$$m_2^* = \det(M_2^*) = \det \begin{bmatrix} -5184 & 1152 \\ 1152 & -58982 \end{bmatrix} = 304435584 > 0$$

On a donc une forme **négative définie (dans ce cas un maximum global unique)**, car les signes alternent en partant du <0 pour les mineurs principaux primaires, ce qui donne un maximum. Bingo !