Exercice 3 et solutions v2.0 errata corrigés

1-Tracez les courbes d'indifférence qui correspondent aux fonctions d'utilité suivantes (tracez 2 courbes pour chaque fonctions avec les niveaux d'utilité $U = 10$ et $U = 20$).

a) $U(x_1, x_2) = x_1^{0.6} x_2^{0.4}$

b) $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$

c) $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_2}$

d) $U(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$

e) $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$

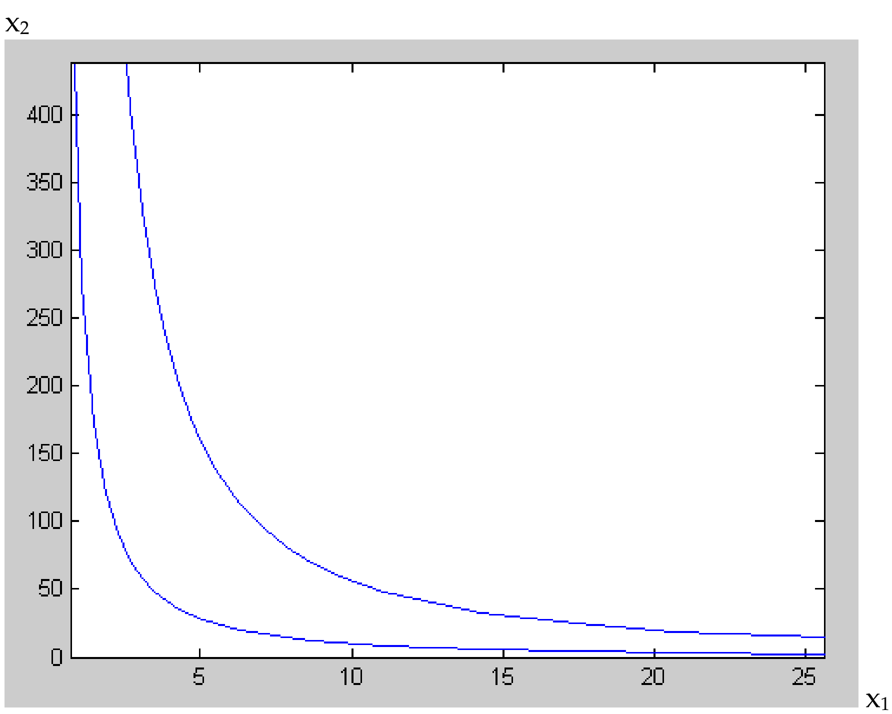
2- Trouvez les quantités de x_1 et de x_2 qui seront les choix du consommateur pour toutes les fonctions d'utilité de la question précédente si sa contrainte budgétaire est $100 = 5x_1 + 5x_2$

1-Tracez les courbes d'indifférence qui correspondent aux fonctions d'utilité suivantes (tracez 2 courbes pour chaque fonctions avec les niveaux d'utilité $U = 10$ et $U = 20$).

a) $U(x_1, x_2) = x_1^{0.6} x_2^{0.4} \quad \Rightarrow \quad x_2^{0.4} = \dfrac{U(x_1, x_2)}{x_1^{0.6}} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \left(\dfrac{U(x_1, x_2)}{x_1^{0.6}} \right)^{1/0.4}$

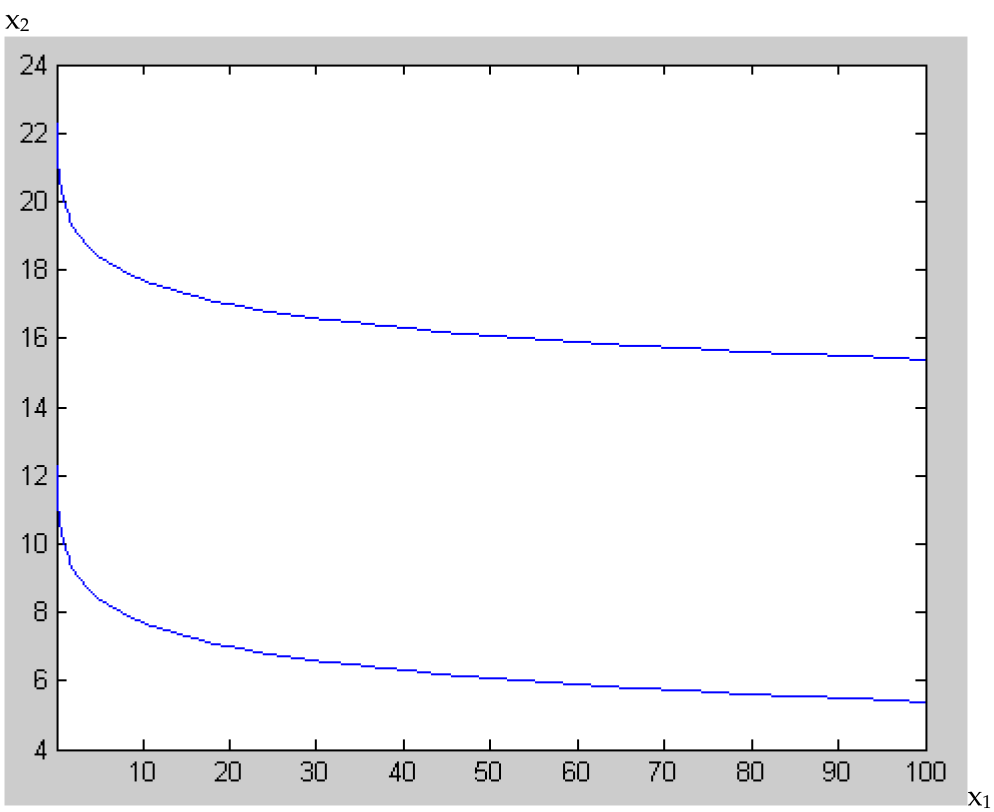
x_1	$x_2 = \left(\dfrac{10}{x_1^{0.6}} \right)^{1/0.4}$	$x_2 = \left(\dfrac{20}{x_1^{0.6}} \right)^{1/0.4}$
0.1	10000	56569
1	316.23	1788.9
2	111.8	632.46
3	60.858	344.27
4	39.528	223.61
5	28.284	160
6	21.517	121.72
7	17.075	96.589
8	13.975	79.057
9	11.712	66.254
10	10	56.569

```
fplot('(10/(x^0.6))^(1/0.4)',[0.7 200])
hold on;
fplot('(20/(x^0.6))^(1/0.4)',[0.7 200])
```



b) $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = U(x_1, x_2) - \ln x_1$

x_1	$x_2 = 10 - \ln x_1$	$x_2 = 20 - \ln x_1$
0.1	12.303	22.303
1	10	20
2	9.3069	19.307
3	8.9014	18.901
4	8.6137	18.614
5	8.3906	18.391
6	8.2082	18.208
7	8.0541	18.054
8	7.9206	17.921
9	7.8028	17.803
10	7.6974	17.697



c) $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_2} \qquad \Rightarrow \qquad \left(U(x_1, x_2)\right)^2 = \left(\sqrt{x_2}\right)^2 = x_2$

$x_2 = 10^2 = 100 \quad et \quad x_2 = 20^2 = 400$

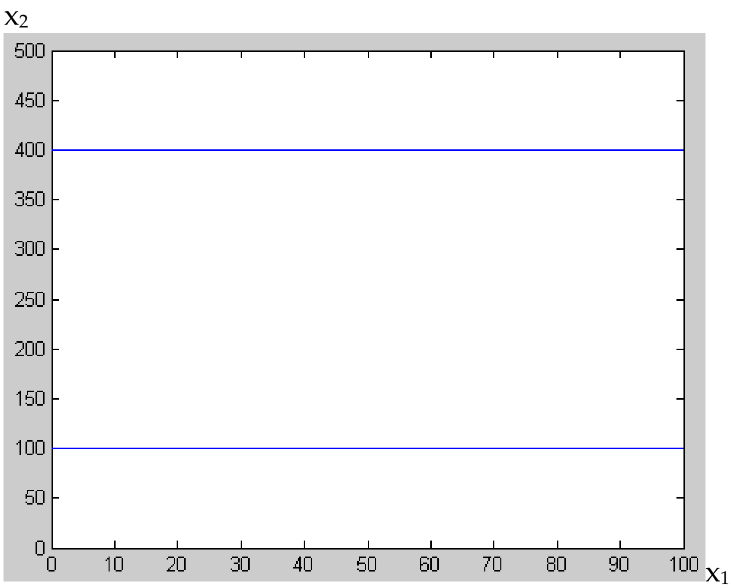


figure
fplot('100',[0.1 100])
hold on;
fplot('400',[0.1 100])
axis([0 100 0 500])

d) $U(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \dfrac{U(x_1, x_2) - x_1}{3}$

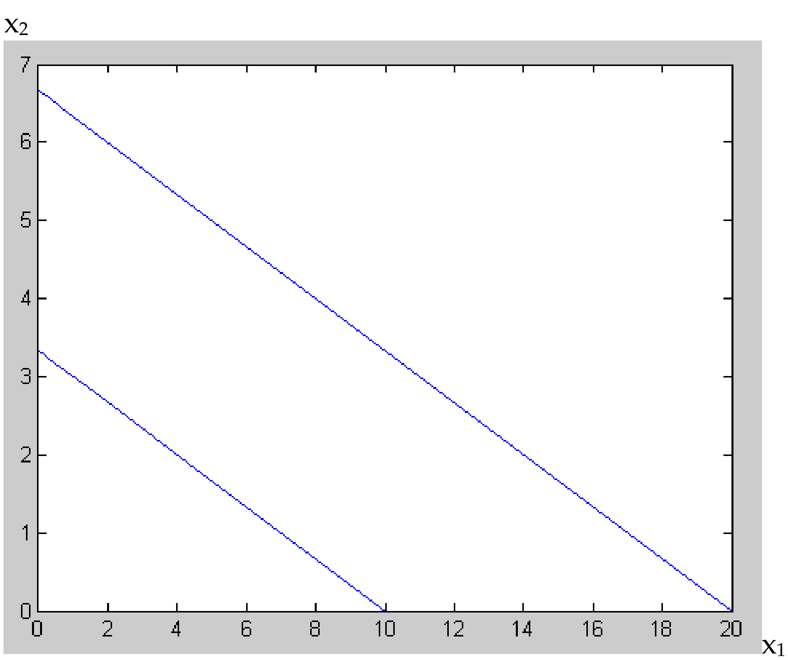
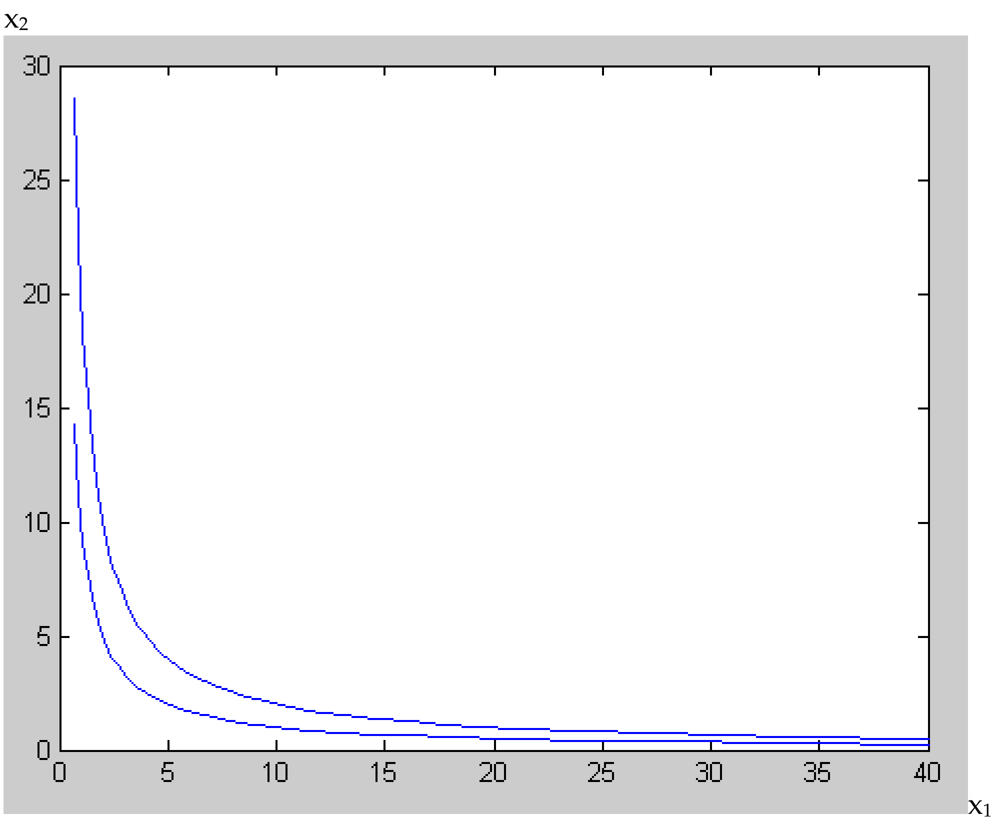


figure
fplot('(10-x)/3',[0 10])
hold on;
fplot('(20-x)/3',[0 20])

e) $U(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{U(x_1, x_2)}{x_1}$

x_1	$x_2 = \left(\dfrac{10}{x_1}\right)$	$x_2 = \left(\dfrac{20}{x_1}\right)$
0.1	100	200
1	10	20
2	5	10
3	3.3333	6.6667
4	2.5	5
5	2	4
6	1.6667	3.3333
7	1.4286	2.8571
8	1.25	2.5
9	1.1111	2.2222
10	1	2

```
fplot('(10/(x))',[0.7 100])
hold on;
fplot('(20/(x)) ',[0.7 100])
```



2- Trouvez les quantités de x_1 et de x_2 qui seront les choix du consommateur pour toutes les fonctions d'utilité de la question précédente si sa contrainte budgétaire est $100 = 5x_1 + 5x_2$

$$100 = 5x_1 + 5x_2 \quad \Rightarrow \quad 20 = x_1 + x_2$$

a) $\max\limits_{x_1, x_2} \; U(x_1, x_2) = x_1^{0.6} x_2^{0.4}$ s.c. (sous la contrainte) $100 = 5x_1 + 5x_2$

On peut prendre une transformation monotone croissance de la fonction pour simplifier les calculs, on prend la fonction ln() de U.

$$V(x_1, x_2) = \ln U(x_1, x_2) = \ln(x_1^{0.6} x_2^{0.4}) = 0.6 \ln x_1 + 0.4 \ln(x_2)$$

On substitut la contrainte dans la fonction d'utilité, ceci donne une fonction de x_1 uniquement

$$V(x_1, x_2) = 0.6 \ln x_1 + 0.4 \ln\left(\frac{100 - 5x_1}{5}\right) = 0.6 \ln x_1 + 0.4 \ln\left(20 - x_1\right)$$

On maximise la nouvelle fonction d'utilité par rapport à x_1

$$\max_{x_1} \quad 0.6 \ln x_1 + 0.4 \ln\left(20 - x_1\right)$$

On dérive par rapport à x_1 et on pose que la dérivé est égale à 0 (c'est la condition d'optimalité, de maximisation pour trouver le point le plus haut).

C.P.O. (condition de premier ordre)

$$\frac{d\left(0.6 \ln x_1 + 0.4 \ln\left(20 - x_1\right)\right)}{dx_1} = \frac{0.6}{x_1} + 0.4 \frac{1}{\left(20 - x_1\right)}(-1) = 0 \qquad \text{car} \quad \frac{d \ln f(x)}{dx} = \frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{0.6}{x_1} = \frac{0.4}{\left(20 - x_1\right)} \quad \Rightarrow \quad 0.6\left(20 - x_1\right) = 0.4x_1 \quad \Rightarrow \quad 0.6 \cdot 20 = 0.4x_1 + 0.6x_1$$

$$\Rightarrow \quad x_1^* = \frac{0.6 \cdot 20}{0.4 + 0.6} = 12 \qquad \text{la demande de } x_1$$

$$x_2^* = 20 - x_1 = 20 - 12 = 8$$

b) $\max_{x_1, x_2} \; U(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$ s.c. (sous la contrainte) $100 = 5x_1 + 5x_2$

On substitut la contrainte dans la fonction d'utilité

$$U(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad U(x_1, x_2) = \ln x_1 + \underbrace{\left(\frac{100 - 5x_1}{5}\right)}_{x_2}$$

On maximise la nouvelle fonction d'utilité

$$\max_{x_1} \quad \ln x_1 + \underbrace{\left(\frac{100 - 5x_1}{5}\right)}_{x_2}$$

On dérive par rapport à x_1 et on pose que la dérivé est égale à 0.

CPO

$$\frac{d\left(\ln x_1 + \left(\frac{100 - 5x_1}{5}\right)\right)}{dx_1} = \frac{d\left(\ln x_1 + \left(20 - x_1\right)\right)}{dx_1} = \frac{1}{x_1} - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1^* = 1$$

$$100 = 5x_1 + 5x_2 \quad \Rightarrow \quad 100 = 5(1) + 5x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2^* = 19$$

c) $\max_{x_1, x_2} \; U(x_1, x_2) = \sqrt{x_2}$ s.c. $100 = 5x_1 + 5x_2$

Ici c'est simple car seulement x_2 intervient dans la fonction d'utilité, ainsi on ne paiera jamais pour du x_1 car il n'apporte rien en bien-être. Ceci implique que $x_1 = 0$. C'est une solution de coin.

$$100 = 5x_1 + 5x_2 \quad \Rightarrow \quad 100 = 5 \cdot 0 + 5x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 20$$

d) $\max_{x_1, x_2} \; U(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$ s.c. $100 = 5x_1 + 5x_2$

Ici on aura une solution de coin, comme la pente de la contrainte budgétaire est -1 et que la pente de la courbe d'indifférence est $-\frac{1}{3}$, parce que x_2 a plus d'impact dans l'utilité que x_1 on ne consommera pas de x_1 et x_2 sera égal à 20. Bref on consomme que du x_2

e) $\max_{x_1, x_2} \quad U(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad$ s.c. $100 = 5x_1 + 5x_2$

Ici on peut utiliser le fait que l'on a une symétrie au niveau de la fonction d'utilité avec une bissectrice qui passe par $x_2 = x_1$. En imposant cela dans la contrainte budgétaire

$$100 = 5x_1 + 5x_2 \quad \Rightarrow \quad 100 = 5x_2 + 5x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 10$$

Et donc $x_1 = 20 - x_2 = 20 - 10 = 10$

Méthode 2)
Si on voulait procéder par les CPO on ferait comme en a) mais en plus simple au niveau des calculs.

On peut prendre une transformation monotone croissance de la fonction pour simplifier les calculs, on prend la fonction ln() de U.

$$V(x_1, x_2) = \ln U(x_1, x_2) = \ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln(x_2)$$

On substitut la contrainte dans la fonction d'utilité, ceci donne une fonction de x_1 uniquement

$$V(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln\left(\frac{100 - 5x_1}{5}\right) = \ln x_1 + \ln\left(20 - x_1\right)$$

On maximise la nouvelle fonction d'utilité

$$\max_{x_1} \quad \ln x_1 + \ln\left(20 - x_1\right)$$

On dérive par rapport à x_1 et on pose que la dérivé est égale à 0 (c'est la condition d'optimalité, de maximisation pour trouver le point le plus haut).
C.P.O.

$$\frac{d\left(\ln x_1 + \ln\left(20 - x_1\right)\right)}{dx_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{\left(20 - x_1\right)}(-1) = 0 \qquad \text{car} \quad \frac{d \ln f(x)}{dx} = \frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{\left(20 - x_1\right)} \quad \Rightarrow \quad \left(20 - x_1\right) = x_1 \quad \Rightarrow \quad 20 = x_1 + x_1$$

$$\Rightarrow \quad x_1^* = \frac{20}{2} = 10$$

$$x_2^* = 20 - x_1 = 20 - 10 = 10$$

Maximisation de l'utilité : Cas général avec une fonction d'utilité de type Cobb-Douglas

$$\max_{x_1, x_2} \; U(x_1, x_2) = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \qquad \text{sous la contrainte} \qquad m = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

On peut prendre une transformation monotone croissance de la fonction pour simplifier les calculs, on prend la fonction ln() de U.

$$V(x_1, x_2) = \ln U(x_1, x_2) = \ln(A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}) = \ln A + \alpha \ln x_1 + \beta \ln(x_2)$$

On substitut la contrainte dans la fonction d'utilité, ceci donne une fonction de x_1 uniquement

$$V(x_1, x_2) = \ln A + \alpha \ln x_1 + \beta \ln\left(\frac{m - p_1 x_1}{p_2}\right) = \ln A + \alpha \ln x_1 + \beta \ln\left(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1 x_1}{p_2}\right)$$

On maximise la nouvelle fonction d'utilité

$$\max_{x_1} \quad \ln A + \alpha \ln x_1 + \beta \ln\left(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1 x_1}{p_2}\right)$$

On dérive par rapport à x_1 et on pose que la dérivé est égale à 0 (c'est la condition d'optimalité, de maximisation pour trouver le point le plus haut).

C.P.O (conditions de premier ordre)

$$\frac{d\left(\ln A + \alpha \ln x_1 + \beta \ln\left(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1 x_1}{p_2}\right)\right)}{dx_1} = 0 + \frac{\alpha}{x_1} + \beta \frac{1}{\left(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1 x_1}{p_2}\right)}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) = 0$$

car $\dfrac{d \ln f(x)}{dx} = \dfrac{1}{f(x)} \dfrac{df(x)}{dx}$

$$\frac{\alpha}{x_1} - \beta \frac{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\left(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1 x_1}{p_2}\right)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{x_1} - \beta \frac{p_1}{\left(m - p_1 x_1\right)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\left(m - p_1 x_1\right) = \beta p_1 x_1$$

$$\Rightarrow \quad \alpha m - \alpha p_1 x_1 = \beta p_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha m = \alpha p_1 x_1 + \beta p_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} \frac{m}{p_1}$$

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \quad \Rightarrow \quad x_2^* = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} \frac{m}{p_1}\right) = \frac{m}{p_2}\left(\frac{(\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)}\right) - \frac{m}{p_2}\left(\frac{\alpha}{(\alpha + \beta)}\right) = \frac{\beta}{(\alpha + \beta)} \frac{m}{p_2}$$

On pourrait aussi utiliser la méthode du Lagrangien (mais nous ne verrons pas cette technique).