

1) Donnez le domaine de définition D_f des fonctions suivantes.

Fonction	Domaine de définition D_f
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{-x}$	$] -\infty, 0]$
$f(x) = \sqrt{\cos(2x)}$	$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi]$
$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{3-x}\right)$	$] -1, 3[$
$f(x) = -1/(x+3)$	$(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$ ou $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$
$f(x) = \sqrt{9-x}$	$(-\infty, 9]$
$f(x) = \sqrt{\frac{(2-x)}{(x+1)(x+9)}}$	$(-\infty, -9) \cup (-9, -1) \cup (-1, 2]$
$f(x) = x^2 + 3$	\mathbb{R}
$f(x) = \sqrt{2x-8}$	$[4, +\infty)$
$f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{(x-3)(x+5)}$	$(-\infty, -5) \cup (-5, 0]$
$f(x) = x^2 - 2$	\mathbb{R}
$f(x) = \sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$
$f(x) = \frac{3x}{(x-2)(x+5)}$	$\mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}$
$f(x) = x^2 - 6 $	\mathbb{R}
$f(x) = a^x$ avec $a \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
$f(x) = \log_a(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}_+^* OU $(0, +\infty)$
$f(x) = a^x + k$ vec $a, k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
$f(x) = \log_a(x-k)$ avec $a, k \in \mathbb{R}$	$(k, +\infty)$

2) Donnez le type de la forme quadratique de la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

On procède par le calcul des mineurs principaux primaires. Ceux-ci doivent suivre les règles suivantes

Si $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \neq 0$	$\mathbf{x}'A\mathbf{x} > 0$ Positive définie	$\mathbf{x}'A\mathbf{x} \geq 0$ Positive semi-définie	$\mathbf{x}'A\mathbf{x} < 0$ Négative définie	$\mathbf{x}'A\mathbf{x} \leq 0$ Négative semi-définie	$\mathbf{x}'A\mathbf{x} > 0$ pour un ou des \mathbf{x} et $\mathbf{x}'A\mathbf{x} < 0$ pour un ou plusieurs autre(s) \mathbf{x} Non-définie
$m_1^* = \det(M_1^*)$	> 0	≥ 0	< 0	≤ 0	Autre
$m_2^* = \det(M_2^*)$	> 0	≥ 0	> 0	≥ 0	
$m_3^* = \det(M_3^*)$	> 0	≥ 0	< 0	≤ 0	
$m_4^* = \det(M_4^*)$	> 0	≥ 0	> 0	≥ 0	
Etc...	> 0	≥ 0	Alternance < 0 et > 0	Alternance ≤ 0 et ≥ 0	

$m_i^* = \det(M_i^*)$ est le i -ième **mineur principal primaire**, c'est donc le déterminant de la matrice M_i^*

M_i^* est la matrice composée de la sous-matrice prenant les i -ièmes premières lignes et i -ièmes colonnes de la matrice considérée A , donc M_i^* comporte $i \times i$ éléments.

Dans notre cas

$$m_1^* = \det(M_1^*) = 1 > 0$$

$$m_2^* = \det(M_2^*) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 > 0$$

$$m_3^* = \det(M_3^*) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = -10 < 0 \quad \text{Donc comme on a } m_1^* > 0, m_2^* > 0, \text{ et } m_3^* < 0, \text{ on ne respecte pas la règle}$$

\Rightarrow on a une forme non-définie ou indéfinie

$$m_4^* = \det(M_4^*) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 65 > 0$$

3) Maximiser la fonction suivante $f(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{1/2} - 3x_1 - 2x_2$. Trouvez les points critiques x_1^* et x_2^* qui maximisent la fonction. Vérifiez que l'on a bien un maximum.

Le problème se pose de la façon suivante

$$\max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} x_1^{1/4} x_2^{1/2} - 3x_1 - 2x_2 \quad \text{ou} \quad \max_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} f(x_1, x_2)$$

C.P.O. (condition nécessaire)

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{4} x_1^{-3/4} x_2^{1/2} - 3 = 0 \quad (*)$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{2} x_1^{1/4} x_2^{-1/2} - 2 = 0 \quad (**)$$

à partir de (*) et de (**) on écrit respectivement

$$x_1^{-3/4} x_2^{1/2} = 12 \quad (*')$$

et

$$x_1^{1/4} x_2^{-1/2} = 4 \quad (**')$$

Maintenant on a va solutionner pour x_1 ou pour x_2 en fonction de l'autre variable. On peut procéder de plusieurs manières dans ce cas particulier (il y a des fois ou on a moins d'alternatives).

On peut diviser une égalité par l'autre (on pourrait aussi isoler un des x dans l'une et substituer dans l'autre)

$$\frac{x_1^{-3/4} x_2^{1/2}}{x_1^{1/4} x_2^{-1/2}} = \frac{12}{4} \quad \text{ceci donne} \quad \frac{x_2^{1/2 - (-1/2)}}{x_1^{1/4 - (-3/4)}} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{x_2}{x_1} = 3$$

Donc on a une condition d'optimalité reliant x_1 et x_2 au point l'optimal, on a $x_2^* = 3x_1^*$

En substituant ce résultat dans (*)' ou dans (**)' on peut trouver une solution pour x_2^* et x_1^* respectivement qui n'est fonction que de nombres réels.

Substituons $x_2^* = 3x_1^*$ dans (**)'

$$x_1^{1/4} (3x_1)^{-1/2} = 4$$

$$x_1^{1/4} 3^{-1/2} x_1^{-1/2} = 4$$

$$x_1^{1/4} x_1^{-2/4} = \frac{4}{3^{-1/2}}$$

$$x_1^{-1/4} = 4 \cdot 3^{1/2}$$

$$(x_1^{-1/4})^{-4} = (4 \cdot 3^{1/2})^{-4}$$

$$x_1^* = (4 \cdot 3^{1/2})^{-4} = 1/2304 = 0.0004340277777777778$$

Et en substituant dans la condition d'optimalité $x_2^* = 3x_1^*$ on trouve

$$x_2^* = 3x_1^* = 3(1/2304) = 1/768 = 0.0013020833333333333$$

Avertissement : En classe j'avais utilisé la méthode de transformation par le \ln afin de solutionner le système d'équation à partir de (*)' et de (**)' en prenant le \ln de ces deux équations et en substituant pour trouver x_1^* et x_2^* . On obtiendrait le même résultat. Par ailleurs, Sampson Workbook 1 p137-138 solutionne le système en \ln en utilisant les règles de Cramer, c'est aussi bon. Ici les exposants de la fonction objectif nous permettent de bien travailler par la méthode que l'on a adopté. Mais si on avait à la place $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2} - 3x_1 - 2x_2$ par exemple, pour (*)' on aurait $(1/2)x_1^{1/2-1} x_2^{1/2} = 3 \Rightarrow x_1^{-1/2} x_2^{1/2} = 6 \Rightarrow x_2^{1/2} = 6x_1^{1/2} \Rightarrow x_2 = 36x_1$ et en substituant dans (**)' on aurait pas une solution car (**)' qui serait $x_1^{1/2} x_2^{-1/2} = 4$ donnerait

$$x_1^{1/2} x_2^{-1/2} = 4$$

$$x_1^{1/2} (36x_1)^{-1/2} = 4$$

$$x_1^{1/2} x_1^{-1/2} = 4/36^{-1/2}$$

$$x_1^{1/2-1/2} = 4/36^{-1/2}$$

$$x_1^0 = \text{????}$$

Ainsi ici il faudrait utiliser la méthode du système transformé par le \ln . Chaque problème est différent. Plus on en fait, plus on est bon.

Revenons à nos moutons!

Maintenant si la condition nécessaire de premier ordre d'applique, il faut vérifier la condition de deuxième ordre C.D.O. Pour le problème original on a donc.

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{4} \frac{3}{4} x_1^{-3/4-1} x_2^{1/2} = -\frac{3}{16} x_1^{-7/4} x_2^{1/2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{2} x_1^{1/4} x_2^{-1/2-1} = -\frac{1}{4} x_1^{1/4} x_2^{-3/2} \quad (**)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{4} x_1^{-3/4} x_2^{1/2} - 3 \right) = \frac{1}{8} x_1^{-3/4} x_2^{-1/2}$$

Donc la matrice Hessienne donne

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} x_1^{-7/4} x_2^{1/2} & \frac{1}{8} x_1^{-3/4} x_2^{-1/2} \\ \frac{1}{8} x_1^{-3/4} x_2^{-1/2} & -\frac{1}{4} x_1^{1/4} x_2^{-3/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5184 & 1152 \\ 1152 & -58982 \end{bmatrix}$$

On a ainsi

$$m_1^* = \det(M_1^*) = -5184 < 0$$

$$m_2^* = \det(M_2^*) = \det \begin{bmatrix} -5184 & 1152 \\ 1152 & -58982 \end{bmatrix} = 304435584 > 0$$

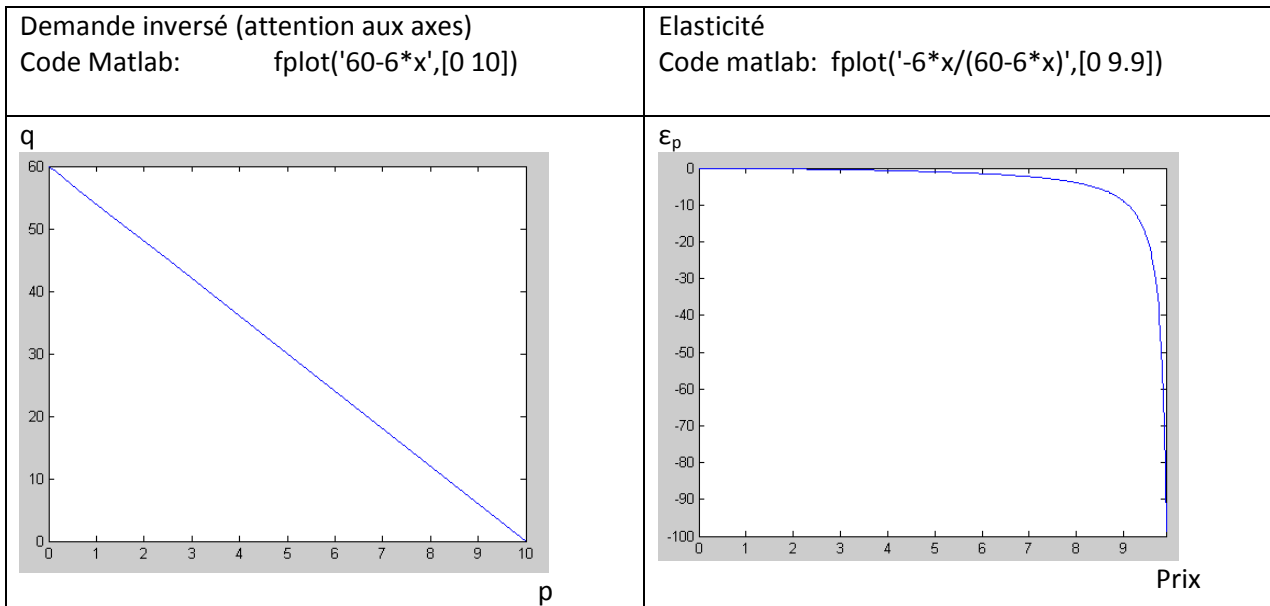
On a donc une forme **négative définie**, car les signes alternent en partant du <0 pour les mineurs principaux primaires, ce qui donne un maximum. Bingo !

4) Pour les demandes suivantes, donnez les équations des élasticités prix $\varepsilon(p) = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$ (en fonction des prix uniquement) et tracez-les.

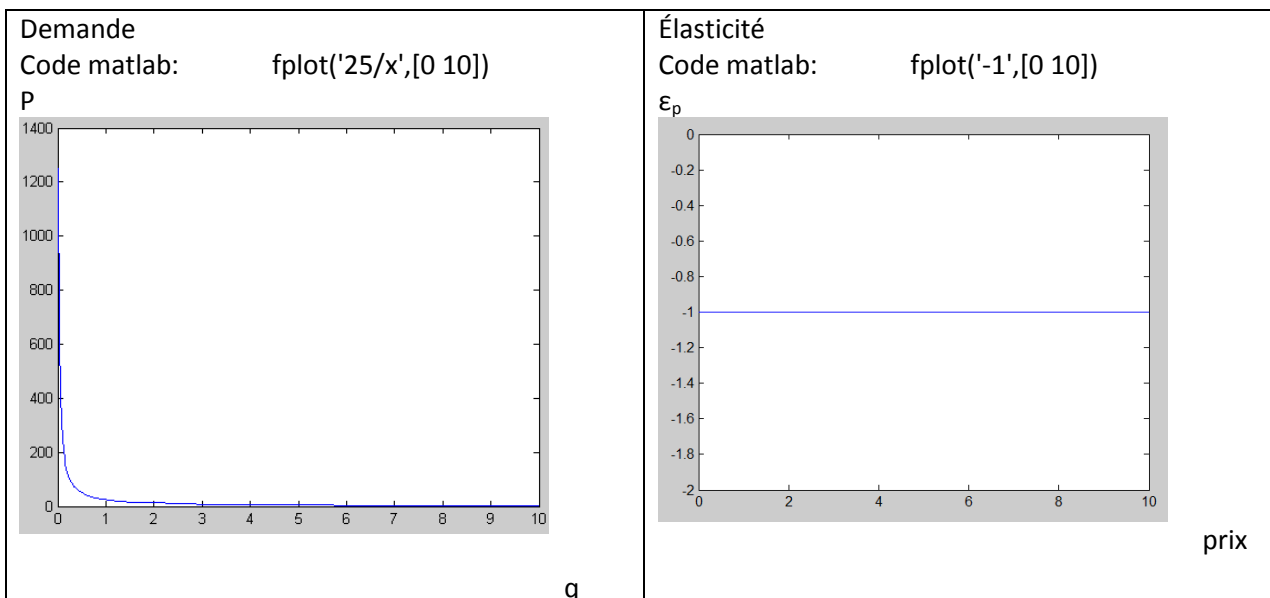
a) $q = 60 - 6p$

b) $q = \frac{50}{2p}$

$\frac{dq}{dp} = -6$ ainsi $\varepsilon(p) = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = (-6) \cdot \frac{p}{60 - 6p}$



b) $\frac{dq}{dp} = -25 / p^2$ ainsi $\varepsilon(p) = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = (-25 / p^2) \cdot \frac{p}{25 / p} = -1$



5) Isolez x dans les expressions suivantes:

a)

$$0 = \frac{a + 6z}{a^{\ln(1-x)}} + 1$$

b)

$$4 = \frac{z}{a^{(x-3)^Y}} + 1$$

c)

$$C = \frac{\theta}{\left(a^{\frac{-4}{(x-3)^Y}} \right)} + Y$$

d)

$$d = \frac{\theta}{\left(a^{\frac{4}{x\sqrt{x}}} \right)} - z^4$$

e)

$$\frac{a^{\ln(1-x)}}{a + 5z + Q} + z = \phi$$

f)

$$\frac{z^{2/3}}{b^{(x-1)^z}} + z = z^4$$

$$a) \quad 0 = \frac{a + 6z}{a^{\ln(1-x)}} + 1$$

$$-1 = \frac{a + 6z}{a^{\ln(1-x)}}$$

$$a^{\ln(1-x)} = -(a + 6z)$$

$$\ln a^{\ln(1-x)} = \ln(-a - 6z)$$

$$\ln(1-x) \ln a = \ln(-a - 6z)$$

$$\ln(1-x) = \frac{\ln(-a - 6z)}{\ln a}$$

$$e^{\ln(1-x)} = e^{\left(\frac{\ln(-a - 6z)}{\ln a}\right)}$$

$$1-x = e^{(\cdot)}$$

$$x = -e^{\left(\frac{\ln(-a - 6z)}{\ln a}\right)} + 1$$

$$b) \quad 4 = \frac{z}{a^{(x-3)^y}} + 1$$

$$3 a^{(x-3)^y} = z$$

$$a^{(x-3)^y} = \frac{z}{3}$$

$$\ln a^{(x-3)^y} = \ln\left(\frac{z}{3}\right)$$

$$(x-3)^y = \frac{\ln\left(\frac{z}{3}\right)}{\ln(a)}$$

$$x = \left(\frac{\ln\left(\frac{z}{3}\right)}{\ln(a)}\right)^{\frac{1}{y}} + 3$$

$$d. \quad C = \frac{\theta}{a^{\left(\frac{-4}{(x-3)^4}\right)}} + Y$$

$$C - Y = \frac{\theta}{a^{\left(\frac{-4}{(x-3)^4}\right)}}$$

$$a^{\left(\frac{-4}{(x-3)^4}\right)} = \frac{\theta}{(C - Y)}$$

$$a^{\left(\frac{-4}{(x-3)^4}\right)^{-1/4}} = \left(\frac{\theta}{C - Y}\right)^{-1/4}$$

$$a^{\frac{1}{(x-3)^4}} = \left(\frac{\theta}{C - Y}\right)^{-1/4}$$

$$\frac{1}{(x-3)^4} \ln a = -\frac{1}{4} \ln \left(\frac{\theta}{C - Y}\right)$$

$$\frac{1}{(x-3)^4} = \frac{-\frac{1}{4} \ln \left(\frac{\theta}{C - Y}\right)}{\ln(a)}$$

$$\frac{-4 \ln(a)}{\ln \left(\frac{\theta}{C - Y}\right)} = (x-3)^4$$

$$\left(\frac{-4 \ln(a)}{\ln \left(\frac{\theta}{C - Y}\right)}\right)^{1/4} + 3 = x$$

d)

$$d = \frac{\theta}{a^{\frac{4}{x\sqrt{x}}}} - z^4$$

$$d + z^4 = \frac{\theta}{a^{\frac{4}{xx^{1/2}}}}$$

$$a^{\frac{4}{xx^{1/2}}} = \frac{\theta}{(d + z^4)}$$

$$\frac{4}{xx^{1/2}} \ln(a) = \ln\left(\frac{\theta}{(d + z^4)}\right)$$

$$x^{3/2} = \frac{4 \ln(a)}{\ln\left(\frac{\theta}{(d + z^4)}\right)}$$

$$x = \left(\frac{4 \ln(a)}{\ln\left(\frac{\theta}{(d + z^4)}\right)}\right)^{2/3}$$

e)

$$\frac{a^{\ln(1-x)}}{a + 5z + Q} + z = \phi$$

$$a^{\ln(1-x)} = (a + 5z + Q)(\phi - z)$$

$$\ln(a^{\ln(1-x)}) = \ln((a + 5z + Q)(\phi - z))$$

$$\ln(1-x) \ln(a) = \ln((a + 5z + Q)(\phi - z))$$

$$\exp(\ln(1-x)) = \exp\left(\frac{\ln((a + 5z + Q)(\phi - z))}{\ln(a)}\right)$$

$$x = 1 - \exp\left(\frac{\ln((a + 5z + Q)(\phi - z))}{\ln(a)}\right)$$

f)

$$\frac{z^{2/3}}{b^{(x-1)z}} + z = z^4$$

$$\frac{z^{2/3}}{b^{(x-1)z}} = z^4 - z$$

$$b^{(x-1)z} = \frac{z^{2/3}}{z^4 - z}$$

$$\ln b^{(x-1)z} = \ln \left(\frac{z^{2/3}}{z^4 - z} \right)$$

$$(x-1)z = \frac{\ln \left(\frac{z^{2/3}}{z^4 - z} \right)}{\ln b}$$

$$x = 1 + \left(\frac{\ln \left(\frac{z^{2/3}}{z^4 - z} \right)}{\ln b} \right)^{1/z}$$

Il peut exister d'autres solutions pour la question 5.