

1- Trouver les dérivées totales des fonctions dérivables suivantes :

a) $\frac{dy}{dw}$ avec $y = f(x, w) = 3x - w^2$ avec $x = g(w) = 2w^2 + w + 4$

$$\frac{dy}{dw} = f_x \frac{dx}{dw} + f_w \frac{dw}{dw} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dw} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{dw}{dw} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dw} + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot 1 = 3 \frac{d(2w^2 + w + 4)}{dw} - 2w = 3(4w + 1) - 2w = 10w + 3$$

On peut vérifier en substituant $x = g(w) = 2w^2 + w + 4$ dans $y = 3(2w^2 + w + 4) - w^2$

$$\frac{dy}{dw} = \frac{d(3(2w^2 + w + 4) - w^2)}{dw} = 12w + 3 - 2w = 10w + 3 \quad \text{Ça marche!!!!}$$

b) $\frac{dy}{dw}$ avec $y = f(x, w) = \ln(x) - w + x$ avec $x = g(w) = w + 4$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dw} &= \frac{d(\ln(x) + x - w)}{dw} = f_x \frac{dx}{dw} + f_w \frac{dw}{dw} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dw} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{dw}{dw} = \left(\frac{1}{x} + 1\right) \frac{dx}{dw} + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot 1 \\ &= \left(\frac{1}{x} + 1\right) \frac{d(w+4)}{dw} - 1 = \left(\frac{1}{x} + 1\right) - 1 = \frac{1}{x} = \frac{1}{w+4} \end{aligned}$$

2- Trouver les différentielles totales dy des fonctions suivantes :

a) $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$

$$dy = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 = (2x_1 x_2^3) dx_1 + (3x_1^2 x_2^2) dx_2$$

b) $y = f(x_1, x_2) = \frac{(x_1 + x_2^2)}{(x_1 + x_2)} = (x_1 + x_2^2)(x_1 + x_2)^{-1} = h(x_1, x_2)g(x_1, x_2)$

avec $h(x_1, x_2) = (x_1 + x_2^2)$ et $g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^{-1}$

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 \\ &= \underbrace{\left(\frac{-(x_1 + x_2^2)}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{1}{(x_1 + x_2)} \right)}_{h \cdot g'_{x_1} + h'_{x_1} \cdot g} dx_1 + \underbrace{\left(\frac{-(x_1 + x_2^2)}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{2x_2}{(x_1 + x_2)} \right)}_{h \cdot g'_{x_2} + h'_{x_2} \cdot g} dx_2 \end{aligned}$$

c) $y = x_2 \ln(x_1)$

$$dy = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 = \left(\frac{x_2}{x_1} \right) dx_1 + \ln(x_1) dx_2$$

d) $y = f(x_1, x_2, w, v)$ avec $x_1 = g(u, v)$ et $x_2 = h(u, v)$

Donc on a $y = f(g(u, v), h(u, v), w, v)$

$$dy = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial v} dv}_{\text{effets indirects}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial w} dw + \frac{\partial f}{\partial v} dv}_{\text{effets directs}}$$

$$dy = \left(\frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw$$

3- Trouvez les dérivées $\frac{dy}{dx}$ des fonctions (relations) implicites suivantes :

a) $F(x, y) = x^2 y + 6y^2 x = 0$ donne $\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}} = - \frac{2xy + 6y^2}{x^2 + 12yx}$

b) $F(x, y) = x^2 y^2 + 4xy + 6 = 0$ donne $\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}} = - \frac{2xy^2 + 4y}{2x^2 y + 4x}$

c) $F(x, y) = 5x^3 + xy - y^2 = 0$ donne $\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}} = - \frac{15x^2 + y}{x - 2y}$

rappel : Avec la fonction implicite $F(x, y) = 0$ on a $\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}$

4- Avec la définition formelle δ et ε de la limite.

Définition de la limite : une fonction numérique f d'une variable réelle x tend vers une **limite finie** ℓ , notée $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, lorsque x tend vers x_0 si, et seulement si :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Lorsque la fonction f tend vers une limite ℓ , lorsque x tend vers x_0 , on dit que f "**possède**" une **limite** ℓ en x_0 .

Démontrez formellement les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} 7x - 9 = -30$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} -3x^2 + x + 4 = 2$

5- Calculez les déterminants des matrices suivantes :

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\det(A) = 12$ pour une matrice triangulaire on peut faire le produit des termes sur la diagonale

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(B) = -60$

c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(C) = 15$