

La **différentielle totale** pour une fonction $y = f(x_1, x_2)$ est donnée par :

v1.1

$$dy = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 \quad \text{où on note } f_{x_1} \equiv f_1 \equiv \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \text{ et}$$

$$f_{x_2} \equiv f_2 \equiv \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

Pour une fonction $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables on aurait : $dy = \sum_{i=1}^n f_{x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_i} dx_i$

Règles pratiques pour le calcul des différentielles

u et v sont des fonctions de x_1 et x_2 , par exemple $u = f(x_1, x_2)$ et $v = g(x_1, x_2)$, et $c, n \in \mathbb{R}$ sont des constantes réelles.

On aurait ainsi les différentielles totales suivantes : $du = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2$

$$\text{et } dv = g_{x_1} dx_1 + g_{x_2} dx_2 = \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2$$

1) $dk = 0$

2) $d(cu) = cdu$

3) $d(cu^n) = cnu^{n-1}du$

4) $d(u \pm v) = du \pm dv$

5) $d(uv) = vdu + udv$

6) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(vdu - u dv) = \frac{(vdu - u dv)}{v^2} \quad \text{avec } v \neq 0$

7) $d(\ln u) = \frac{1}{u} du$

8) $d(e^u) = e^u du$

Si on a aussi w qui est une fonction de x_1 et x_2 , on peut ajouter les règles suivantes :

4*) $d(u \pm v \pm w) = du \pm dv \pm dw$

5*) $d(uvw) = vwdu \pm uwdv \pm uvdw$

La **dérivée totale** $\frac{dy}{dw}$ pour une fonction $y = f(x, w)$ par rapport à w (avec x qui est une fonction de w telle que

$x = g(w)$) est obtenue en prenant la différentielle totale et en la divisant par dw de la manière suivante:

$$\frac{dy}{dw} = \frac{f_x dx + f_w dw}{dw} = f_x \frac{dx}{dw} + f_w \frac{dw}{dw} = \frac{\partial f(x, w)}{\partial x} \frac{dx}{dw} + \frac{\partial f(x, w)}{\partial w}$$