

Important : Montrez bien tous vos calculs, démonstrations et explications pour toutes les questions et ordonnez bien votre devoir.

Q1-Systèmes d'équations

a) Solutionnez le système d'équations suivant avec la méthode de la matrice adjointe si c'est possible.

$$r + 2s + t = 4$$

$$r - s + t = 5$$

$$2r + 3s - t = 1$$

b) Solutionnez le système d'équations suivant en utilisant la règle de Cramer si c'est possible.

$$3x - 2y - 7 = 0$$

$$3y - 2z = 6$$

$$-2x + 3z = -1$$

c) Solutionnez le système d'équations suivant avec la méthode d'échelonnage et de réduction si c'est possible.

$$3x + y - z = 2$$

$$2x + 3z = 4$$

$$x + y - 4z = 7$$

d) Solutionnez le système d'équations suivant avec la méthode d'échelonnage et de réduction si c'est possible. Ici x et z sont les variables endogènes. Exprimez la solution en forme paramétrique.

$$x + 2y - z + w = 0$$

$$x + 2y - 2w = 0$$

e) Solutionnez le système d'équations suivant avec la méthode d'échelonnage et de réduction si c'est possible.

$$x + y + z = 4$$

$$x - 2y + 3z = 0$$

$$2x + 3y + 2z = 10$$

Q2- Nous avons le modèle économétrique à deux variables explicatives ($K = 2$, dont une des variables est une constante) suivant :

$$y_i = x_{i1}\beta_1 + x_{i2}\beta_2 + \varepsilon_i \quad \text{où } i = 1, 2, \dots, n \text{ et le nombre d'observation } n = 4 \text{ avec } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

En format matriciel on peut présenter ce modèle économétrique avec la forme suivante:

$$y = X\beta + \varepsilon$$

où on a la variable à expliquer (endogène) : $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$,

où on a la matrice de variables explicatives (exogènes) : $X_{n \times K} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{bmatrix}$

et de vecteur d'aléas (de perturbations) non-observé(e)s : $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$

En version matricielle, notez que le vecteur de perturbations $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ où $N(\cdot)$ est une distribution normale de moyenne $0_{n \times 1}$ et de variance $\sigma^2 I_n$. C'est-à-dire que le vecteur de perturbations ε suit une distribution normale de moyenne $0_{n \times 1}$ et de variance $\sigma^2 I_n$.

Pour une seule observation, la i -ième, on a $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, c'est-à-dire que ε_i suit une distribution normale de moyenne 0 et de variance σ^2 .

Notez qu'ici **les paramètres β et σ^2 sont inconnus**, donc on veut les estimer à partir de vraies données.

Nous avons les données suivantes basées sur $n = 4$ observations et $K = 2$ variables.

$$y = \begin{bmatrix} 22 \\ 14 \\ 18 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{et donc } X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

a) Vous décidez d'estimer ce modèle par les moindres carrés ordinaires (MCO).

Calculez les valeurs des paramètres estimés $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ à partir de l'estimateur MCO donné par la formule suivante:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = (X'X)^{-1}X'y.$$

b) Calculez la prévision de y notée \hat{y} à partir de l'estimé $\hat{\beta}$ obtenu à la question précédente.

La prévision \hat{y} est simplement calculée à partir de la formule suivante : $\hat{y} = X\hat{\beta}$

c) Calculez l'erreur de prévision $\hat{\varepsilon} = y - X\hat{\beta} = y - \hat{y}$ calculée à partir de l'estimé $\hat{\beta}$ et de la prévision \hat{y} obtenus aux questions a) et b).

d) Calculez la variance estimée de l'erreur de prévision notée $\hat{\sigma}^2 = \widehat{\text{var}}(\hat{\varepsilon}_i)$ calculée à partir des résultats sur $\hat{\beta}$, \hat{y} et $\hat{\varepsilon}$ obtenus aux questions précédentes.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n - K} = \frac{(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})}{n - K} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2}{n - K} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - K}$$

e) Donnez la matrice de variance-covariance estimée $\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$ de cet estimateur MCO.

La matrice de variance-covariance estimée (de dimension $K \times K$) est la matrice de variance-covariance estimée des paramètres estimés $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$.

On calcule la matrice de variance-covariance estimée avec la formule suivante :

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$$

où $\hat{\sigma}^2$ est obtenu à la question précédente.

Rappel : Pour une matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ de dimension 2×2 , l'inverse est donnée par

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = \frac{(\text{cof}(A))'}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$