Q1-Systèmes d'équations

a) Solutionnez le système d'équations suivant avec la méthode de la matrice adjointe si c'est possible.

$$r + 2s + t = 4$$
$$r - s + t = 5$$
$$2r + 3s - t = 1$$

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$\det(A) = 9 \neq 0$ donc l'inverse existe. Et se calcule avec

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{\det(A)}\left(cof(A)\right)^T = \frac{1}{\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\right)} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\right)} \begin{bmatrix} -2 & -(-3) & 5 \\ -(-5) & -3 & -(-1) \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)} adj(A)b = \frac{1}{\det(A)}\left(cof(A)\right)'b$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/9 \\ -3/9 \\ 22/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2222222222222\ldots \\ -0.333333333333333\ldots \\ 2.44444444444444\ldots \end{bmatrix}$$

b) Solutionnez le système d'équations suivant en utilisant la règle de Cramer si c'est possible.

$$3x - 2y - 7 = 0$$
$$3y - 2z = 6$$
$$-2x + 3z = -1$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$\det(A) = 19 \neq 0$ donc l'inverse existe.

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)} = \frac{95}{19} = 5$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)} = \frac{76}{19} = 4$$

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)} = \frac{57}{19} = 3$$

c) Solutionnez le système d’équations suivant avec la méthode d’échelonnage et de réduction si c’est possible.

$3x + y - z = 2$

$2x + 3z = 4$

$x + y - 4z = 7$

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 7 \end{array}\right]$$

Avec les opérations élémentaires sur les lignes on obtient la matrice augmentée suivante d’un système équivalent

$$\overset{\ell}{\sim} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ et on note que le système est **incohérent** car $rang(A) < rang([A \mid b])$.

d) Solutionnez le système d’équations suivant avec la méthode d’échelonnage et de réduction si c’est possible. Ici x et z sont les variables endogènes. Exprimez la solution en forme paramétrique.

$x + 2y - z + w = 0$

$x + 2y - 2w = 0$

$$A\mathbf{x} = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Avec les opérations élémentaires sur les lignes on obtient la matrice augmentée du système équivalent

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{\ell_2{}'=\ell_2-\ell_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \overset{\ell_1{}'=\ell_1+\ell_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] = [R \mid h]$$

Les variables liées (endogènes sont x et z). Écrivons toutes les équations du nouveau système en incluant des égalités pour les variables libres (exogènes y et w) et remplaçons les variables libres à droite par des constantes réelles.

$$\begin{aligned} x &= -2y + 2w \\ y &= y \\ z &= 3w \\ w &= w \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= -2c_1 + 2c_2 \\ y &= c_1 \\ z &= 3c_2 \\ w &= c_2 \end{aligned}$$

Écrivons maintenant l’ensemble de solutions en forme générale paramétrique

$$S := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} c_2,\ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

e) Solutionnez le système d'équations suivant avec la méthode d'échelonnage et de réduction si c'est possible.

$$x + y + z = 4$$
$$x - 2y + 3z = 0$$
$$2x + 3y + 2z = 10$$

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 10 \end{array}\right]$$

Avec les opérations de lignes élémentaires sur les lignes on obtient la matrice augmentée du système équivalent

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 10 \end{array}\right] \quad \overset{\ell}{\sim} \quad [R \mid h] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \text{ où } R = I_3 \text{ et } h{=}\mathbf{x}$$

Et cette matrice est $[R \mid h] = [I \mid \mathbf{x}]$, donc échelonner et réduire nous donne directement les solutions $\mathbf{x}$.

Donc,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Q2-

$$y=\begin{bmatrix}22\\14\\18\\14\end{bmatrix} \quad , \quad x_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \quad , \quad x_2=\begin{bmatrix}3\\2\\3\\2\end{bmatrix} \quad \text{et donc } X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}$$

a) Vous décidez d'estimer ce modèle par les moindres carrés ordinaires (MCO).

Calculez les valeurs des paramètres estimés $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ à partir de l'estimateur MCO donné par la formule suivante:

$$X=\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 2\\1 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$(X'X)=\begin{bmatrix}4 & 10\\10 & 26\end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 10\\10 & 26\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det(X'X)}\begin{bmatrix}26 & -10\\-10 & 4\end{bmatrix}=\frac{1}{(4\cdot 26-(-10)(-10))}\begin{bmatrix}26 & -10\\-10 & 4\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}26 & -10\\-10 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6.5 & -2.5\\-2.5 & 1\end{bmatrix}$$

$$X'y=\begin{bmatrix}68\\176\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\\hat{\beta}_2\end{bmatrix}_{2\times 1}=(X'X)^{-1}X'y=\begin{bmatrix}6.5 & -2.5\\-2.5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}68\\176\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$$

b) Calculez la prévision de y notée $\hat{y}$ à partir de l'estimé $\hat{\beta}$ obtenu à la question précédente.

La prévision $\hat{y}$ est simplement calculée à partir de la formule suivante : $\hat{y}=X\hat{\beta}$

$$\hat{y}=X\hat{\beta}=\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 2\\1 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\14\\20\\14\end{bmatrix}$$

c) Calculez l'erreur de prévision $\hat{\varepsilon}=y-X\hat{\beta}=y-\hat{y}$ calculée à partir de l'estimé $\hat{\beta}$ et de la prévision $\hat{y}$ obtenus aux questions a) et b).

$$\hat{\varepsilon}=y-\hat{y}=\begin{bmatrix}22\\14\\18\\14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}20\\14\\20\\14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\0\end{bmatrix}$$

d) Calculez la variance estimée de l'erreur de prévision notée $\hat{\sigma}^2 = \widehat{\mathrm{var}}(\hat{\varepsilon}_i)$ calculée à partir des résultats sur $\hat{\beta}$, $\hat{y}$ et $\hat{\varepsilon}$ obtenus aux questions précédentes.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n-K} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}{4-2} = \underbrace{\frac{2^2 + 0 + (-2)^2 + 0}{4-2}}_{=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\varepsilon}_i)^2}{n-K}} = \frac{8}{2} = 4$$

e) Donnez la matrice de variance-covariance estimée $\widehat{\mathrm{var}}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$ de cet estimateur MCO.

La matrice de variance-covariance estimée (de dimension $K \times K$) est la matrice de variance-covariance estimée des paramètres estimés $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$.

On calcule la matrice de variance-covariance estimée avec la formule suivante :

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1} = 4\begin{bmatrix} 6.5 & -2.5 \\ -2.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & -10 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$$

```
Code Matlab et Scilab
x1=[1;
    1;
    1;
    1;]

x2=[3 2 3 2]'

X=[x1 x2]

[n K]=size(X)

XX=X'*X

y=[22 14 18 14]'

invXX=inv(X'*X)

Xy=X'*y

Bhat=inv(X'*X)*X'*y

yhat=X*Bhat

ehat=y-yhat

sig2=ehat'*ehat/(n-K)

varbetahat=sig2*inv(X'*X)
```