Dev 2 Q1 a) $\underset{x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}}{\text{opt}} \quad 10\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)$ v1.1 Attention! il peut y avoir des erratas

Sous les deux contraintes suivantes:

$12 = 6x_1 - 3x_2 - 9x_3$ et $200 = 200x_1 + 400x_2 + 200x_3$

On écrit le Lagrangien que l'on optimise:

$$\underset{\lambda_1,\lambda_2,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}}{\text{opt}} \quad L(\lambda_1,\lambda_2,x_1,x_2,x_3) = 10\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right) + \lambda_1(12-6x_1+3x_2+9x_3)$$
$$+\lambda_2(200-200x_1-400x_2-200x_3)$$

CPO

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda_1} = 12-6x_1+3x_2+9x_3 = 0 \qquad *$$
$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda_2} = 200-200x_1-400x_2-200x_3 = 0 \qquad **$$
$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial x_1} = 20x_1-6\lambda_1-200\lambda_2 = 0 \qquad ***$$
$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial x_2} = 20x_2+3\lambda_1-400\lambda_2 = 0 \qquad ****$$
$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial x_3} = 20x_3+9\lambda_1-200\lambda_2 = 0 \qquad *****$$

Ici il y a plusieurs possibilités pour solutionner le système d'équations avec 5 variables et 5 inconnues, que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -200 & -400 & -200 \\ -6 & -200 & 20 & 0 & 0 \\ 3 & -400 & 0 & 20 & 0 \\ 9 & -200 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-12\\ -200\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad Ax=b$$

Une approche est d'utiliser la méthode de l'inversion (car ici l'inverse existe $\det(A)\neq 0$) par la matrice adjointe et de multiplier le vecteur b par la matrice inverse pour obtenir $x^* = A^{-1}b$ avec $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = \dfrac{\left(\text{cof}(A)\right)'}{\det(A)}$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.177777777777777 & -0.00133333333333333 & -0.0666666666666667 & 0 & 0.0666666666666667 \\ -0.00133333333333333 & -9.33333333333333e-005 & -0.00133333333333333 & -0.00166666666666667 & -0.000333333333333333 \\ -0.0666666666666667 & -0.00133333333333333 & 0.0166666666666667 & -0.0166666666666667 & 0.0166666666666667 \\ 0 & -0.00166666666666667 & -0.0166666666666667 & 0.0166666666666667 & -0.0166666666666667 \\ 0.0666666666666667 & -0.000333333333333333 & 0.0166666666666667 & -0.0166666666666667 & 0.0166666666666667 \end{bmatrix}$$

```
Code Matlab

A=[0    0 -6     3     9
   0    0 -200 -400 -200
  -6 -200 20     0     0
   3 -400 0     20     0
   9 -200 0      0    20]

Ainv=inv(A)
```

```
Suite…

b=[-12
  -200
   0
   0
   0]

x=Ainv*b
```

Une autre approche est d'utiliser la méthode de Cramer (car ici l'inverse existe $\det(A) \neq 0$).
Une autre possibilité est d'utiliser la substitution.

Par exemple on utilise *** et **** pour éliminer λ_1 , ce qui donne une équation avec x_1, x_2, λ_2 disons (6), par la suite on utilise **** et ***** pour éliminer λ_1 aussi, ce qui donne une équation avec x_2, x_3, λ_2 disons (7).

Par la suite on utilise ces deux nouvelles équations qui combinent *** , **** et ***** pour éliminer λ_2 , cette nouvelle équation est (8). Finalement on peut aisément solutionner le système de trois équations 3 inconnues composé de (8), * et ** pour trouver x_1, x_2, x_3 . Pour retrouver les λ on peut utiliser (7) et * par exemple. Il y a énormément de possibilités par cette approche.

On pourrait évidement aussi prendre l'approche d'échelonner et de réduire la matrice augmentée du système par l'algorithme de Gauss-Jordan.
Le système initial dans l'ordre était

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -200 & -400 & -200 \\ -6 & -200 & 20 & 0 & 0 \\ 3 & -400 & 0 & 20 & 0 \\ 9 & -200 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad Ax = b$$

La matrice augmentée de ce système serait:

$$\left[A \middle| b\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -6 & 3 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & -200 & -400 & -200 & -200 \\ -6 & -200 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -400 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 9 & -200 & 0 & 0 & 20 & 0 \end{array}\right]$$

En appliquant les opérations élémentaires de lignes sur la matrice augmentée on obtient le système suivant échelonné et réduit

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 13/375 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16/15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -11/15 \end{array}\right]$$

On a donc la solution suivante $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 13/375 \\ 16/15 \\ 1/3 \\ -11/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 0.0346666666666667 \\ 1.06666666666667 \\ 0.333333333333333 \\ -0.733333333333333 \end{bmatrix}$

On pourrait par ailleurs réécrire le système pour nous sauver des étapes.
Réorganisons le système pour travailler plus rapidement. On peut modifier l'ordre du vecteur x pour écrire un système équivalent en faisant bien attention de ne pas se tromper. On va donc avoir z un vecteur avec les x_i en premier et les λ_i après. On va aussi mettre les équations ***, **** et ***** en premier et * et ** après. Ainsi on a le nouveau système équivalent suivant :

$$\begin{bmatrix} 20 & & & -6 & -200 \\ & 20 & & 3 & -400 \\ & & 20 & 9 & -200 \\ -6 & 3 & 9 & 0 & 0 \\ -200 & -400 & -200 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -12 \\ -200 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{A}z = \tilde{b}$$

La matrice augmentée de ce système serait:

$$\left[\tilde{A}\middle|\tilde{b}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 20 & & & -6 & -200 & 0 \\ & 20 & & 3 & -400 & 0 \\ & & 20 & 9 & -200 & 0 \\ -6 & 3 & 9 & 0 & 0 & -12 \\ -200 & -400 & -200 & 0 & 0 & -200 \end{array}\right]$$

En appliquant $\begin{array}{l} \ell_1' = (1/20)\ell_1 \\ \ell_2' = (1/20)\ell_2 \\ \ell_3' = (1/20)\ell_3 \end{array}$ on obtient

$$\underset{\substack{\ell_1'=(1/20)\ell_1 \\ \ell_2'=(1/20)\ell_2 \\ \ell_3'=(1/20)\ell_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -6/20 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/20 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9/20 & -10 & 0 \\ -6 & 3 & 9 & 0 & 0 & -12 \\ -200 & -400 & -200 & 0 & 0 & -200 \end{array}\right]$$

En appliquant $\begin{array}{l} \ell_4' = \ell_4 + 6\ell_1 \\ \ell_5' = \ell_5 + 200\ell_1 \end{array}$ on obtient

$$\underset{\substack{\ell_4'=\ell_4+6\ell_1 \\ \ell_5'=\ell_5+200\ell_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -6/20 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/20 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9/20 & -10 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -36/20 & -60 & -12 \\ 0 & -400 & -200 & \color{red}{-60} & -2000 & -200 \end{array}\right]$$

Etc…

Avec les opérations élémentaires sur les lignes, à la fin on obtient la matrice échelonnée et réduite suivante :

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16/15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -11/15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 13/375 \end{array}\right]$$

On a donc la solution suivante $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/15 \\ 1/3 \\ -11/15 \\ 2.4 \\ 13/375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.06666666666667 \\ 0.333333333333333 \\ -0.733333333333333 \\ 2.4 \\ 0.0346666666666667 \end{bmatrix}$

C.D.O. on obtient la hessienne bordée suivante:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda_2^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_3 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_3 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -200 & -400 & -200 \\ -6 & -200 & 20 & 0 & 0 \\ 3 & -400 & 0 & 20 & 0 \\ 9 & -200 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$\bar{m}_5 = \det\left(\bar{H}\right) = 540\ 000\ 000 > 0$, donc on a un **minimum** local (qui est aussi **global** dans ce cas)

Les règles pour les mineurs principaux primaires sont les suivantes

$m = 2$ contrainte	$n = 3$ variables	**Pour maximum local** $\bar{m}_5 < 0$ (le dernier) m **pair** : Premier de **signe négatif** n **impair** : Dernier de **signe négatif**	**Pour minimum local** $signe(\bar{m}_p) = signe\left((-1)^m\right) = signe\left((-1)^2\right)$ $\bar{m}_5 > 0$ **signe positif** (le dernier)

```
Code Matlab
H=[0 0 -6 3 9
   0 0 -200 -400 -200
   -6 -200 20 0 0
   3 -400 0 20 0
   9 -200 0 0 20]
det(H)
540000000
```

b) $\underset{x_1, x_2 \in \mathbb{R}}{\text{opt}} \left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta} \right)^{1/\beta} \qquad \text{avec } a_i > 0 \ et \ 0 < \beta \leq 1$ Sous la contrainte $100 = 2x_1 + 2x_2$

On écrit le lagrangien que l'on optimize

$$\underset{x_1, x_2, \lambda \in \mathbb{R}}{\text{opt}} \ L(\lambda, x_1, x_2) = \left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta} \right)^{1/\beta} + \lambda(100 - 2x_1 - 2x_2)$$

$C.P.O.$

$$\frac{\partial L(\lambda, x_1, x_2)}{\partial \lambda} = 100 - 2x_1 - 2x_2 = 0 \qquad (*)$$

$$\frac{\partial L(\lambda, x_1, x_2)}{\partial x_1} = (1 / \beta)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta} \right)^{1/\beta - 1} \beta a_1 x_1^{\beta - 1} - \lambda 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta} \right)^{(1-\beta)/\beta} a_1 x_1^{\beta - 1} = \lambda 2 \qquad (**)$$

$$\frac{\partial L(\lambda, x_1, x_2)}{\partial x_2} = (1 / \beta)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta} \right)^{1/\beta - 1} \beta a_2 x_2^{\beta - 1} - \lambda 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta} \right)^{(1-\beta)/\beta} a_2 x_2^{\beta - 1} = \lambda 2 \qquad (***)$$

De (**) et (***)

$$\frac{\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta} \right)^{(1-\beta)/\beta} a_1 x_1^{\beta - 1}}{\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta} \right)^{(1-\beta)/\beta} a_2 x_2^{\beta - 1}} = \frac{\lambda 2}{\lambda 2}$$

$$\frac{a_1 x_1^{\beta - 1}}{a_2 x_2^{\beta - 1}} = 1$$

$$x_1^{\beta - 1} = \frac{a_2}{a_1} x_2^{\beta - 1}$$

$$x_1^* = \left(x_1^{\beta - 1} \right)^{1/(\beta - 1)} = \left(\frac{a_2}{a_1} x_2^{\beta - 1} \right)^{1/(\beta - 1)} = \underbrace{\left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{1/(\beta - 1)}}_{c} x_2^* \qquad \Rightarrow \qquad x_1^* = c x_2^* \qquad avec \ \ c = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{1/(\beta - 1)}$$

En substituant dans (*) on a

$$100 - 2x_1^* - 2x_2^* = 0$$

$$100 - 2(c x_2^*) - 2x_2^*$$

$$100 = (2c + 2) x_2^*$$

$$x_2^* = \frac{100}{(2c + 2)} = \frac{100}{\left(2\left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{1/(\beta - 1)} + 2 \right)} = \frac{50}{\left(\left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{1/(\beta - 1)} + 1 \right)} > 0$$

on peut aussi écrire

$$x_2^* = \frac{100}{\left(2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/(\beta-1)}+2\right)} = \frac{100}{\left(2\left(\frac{a_2^{1/(\beta-1)}}{a_1^{1/(\beta-1)}}\right)+2\right)} = \frac{100}{\left(2a_2^{1/(\beta-1)}a_1^{-1/(\beta-1)}+2\right)} = \frac{50}{\left(a_2^{1/(\beta-1)}a_1^{1/(1-\beta)}+1\right)}$$

On peut substituer

$$x_1^* = \underbrace{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/(\beta-1)}}_{c} x_2^* \quad \Rightarrow \quad x_2^* = \frac{1}{c}x_1^* = \frac{1}{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/(\beta-1)}}x_1^* = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}x_1^* = bx_1^* \quad avec\ \ b=\frac{1}{c}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}$$

Dans (*)

$$100-2x_1^*-2x_2^*=0$$
$$100-2x_1^*-2(bx_1^*)$$
$$100=(2+2b)x_1^*$$
$$x_1^* = \frac{100}{(2b+2)} = \frac{100}{\left(2\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}+2\right)} = \frac{50}{\left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}+1\right)} > 0$$

On pourrait aussi substituer x_2^* dans la contrainte (*)

$$100-2x_1^*-2x_2^*=0$$
$$100-2x_1^*-2\left(\frac{50}{\left(\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/(\beta-1)}+1\right)}\right)=0$$
$$100-\left(\frac{100}{\left(\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/(\beta-1)}+1\right)}\right)=2x_1^*$$

$$x_1^* = 50 - \left(\frac{50}{\left(\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/(\beta-1)} + 1\right)}\right) = 50 - \left(\frac{50}{\left(\frac{1}{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}} + 1\right)}\right) = 50 - \left(\frac{50}{\left(\frac{1}{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}} + \frac{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}\right)}\right)$$

$$= 50 - \left(\frac{50}{\left(\frac{1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}\right)}\right) = 50 - \left(\frac{50\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}{1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}\right) = 50\left(\frac{1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}{1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}\right) - 50\left(\frac{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}{1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}\right)$$

$$= 50\left(\left(\frac{1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}{1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}\right) - \left(\frac{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}{1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}\right)\right) = 50\left(\frac{1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)} - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}{1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}\right) = \left(\frac{50}{1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)}}\right)$$

$$x_1^* = \left(\frac{50}{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/(\beta-1)} + 1}\right)$$

$$Rappel$$

$$\frac{\partial L(\lambda, x_1, x_2)}{\partial \lambda} = 100 - 2x_1 - 2x_2$$

$$\frac{\partial L(\lambda, x_1, x_2)}{\partial x_1} = (1 / \beta)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta - 1} \beta a_1 x_1^{\beta - 1} - \lambda 2$$

$$\frac{\partial L(\lambda, x_1, x_2)}{\partial x_2} = (1 / \beta)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta - 1} \beta a_2 x_2^{\beta - 1} - \lambda 2$$

$$\frac{\partial^2 L(\lambda, x_1, x_2)}{\partial \lambda \partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial^2 L(\lambda, x_1, x_2)}{\partial \lambda \partial x_1} = -2$$

$$\frac{\partial^2 L(\lambda, x_1, x_2)}{\partial \lambda \partial x_2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 L(\lambda, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial L(\lambda, x_1, x_2)}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta - 1} a_1 x_1^{\beta-1} - \lambda 2\right)$$
$$= \left(\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-2} a_1 x_1^{\beta-1} \beta a_1 x_1^{\beta-1}\right) + (\beta - 1)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1} a_1 x_1^{\beta-2}$$
$$= \left(\left(\frac{\beta(1-\beta)}{\beta}\right)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-2} a_1 x_1^{\beta-1} a_1 x_1^{\beta-1}\right) + (\beta - 1)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1} a_1 x_1^{\beta-2}$$
$$= \left((1-\beta)\frac{\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1}}{\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)} a_1 x_1^{\beta-1} a_1 x_1^{\beta-1}\right) + (\beta - 1)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1} a_1 \frac{x_1^{\beta-1}}{x_1}$$
$$= \left((1-\beta)\frac{a_1 x_1^{\beta-1}}{\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)}\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1} a_1 x_1^{\beta-1}\right) + (\beta - 1)\frac{1}{x_1}\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1} a_1 x_1^{\beta-1}$$
$$= \left((1-\beta)\frac{a_1 x_1^{\beta-1}}{\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)} + (\beta - 1)\frac{1}{x_1}\right)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1} a_1 x_1^{\beta-1}$$
$$= \left((1-\beta)\frac{a_1 x_1^{\beta-1} x_1}{\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right) x_1} + (\beta - 1)\frac{\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)}{\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right) x_1}\right)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1} a_1 x_1^{\beta-1}$$
$$= \left(\frac{(1-\beta) a_1 x_1^{\beta} + (\beta - 1)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)}{\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right) x_1}\right)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1} a_1 x_1^{\beta-1}$$
$$= \left(\frac{(1-\beta) a_1 x_1^{\beta} + (\beta - 1) a_1 x_1^{\beta} + (\beta - 1) a_2 x_2^{\beta}}{\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right) x_1}\right)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1} a_1 x_1^{\beta-1}$$
$$= \left(\frac{(\beta - 1) a_2 x_2^{\beta}}{\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right) x_1}\right)\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1} a_1 x_1^{\beta-1} \leq 0$$

Car $1 - \beta \leq 0$ et que le reste de l'expression est positif.

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial L(\lambda, x_1, x_2)}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1} a_1 x_1^{\beta-1} - \lambda 2\right)$$
$$= \left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1-1} a_1 x_1^{\beta-1} \beta a_2 x_2^{\beta-1}$$
$$= \beta\left(a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-2} a_1 x_1^{\beta-1} \beta a_2 x_2^{\beta-1} > 0$$

$$\frac{\partial^2 L(\lambda,x_1,x_2)}{\partial x_2^2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial L(\lambda,x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}a_2x_2^{\beta-1}-\lambda 2\right)$$
$$=\left(\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1-1}a_2x_2^{\beta-1}\beta a_2x_2^{\beta-1}\right)+\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}(\beta-1)a_2x_2^{\beta-2}$$
$$=\left(\beta\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1-1}a_2^2x_2^{2(\beta-1)}\right)+(\beta-1)\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}a_2x_2^{\beta-2}$$
$$=\left((1-\beta)\frac{\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}}{\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1}}a_2x_2^{\beta-1}a_2x_2^{\beta-1}\right)+(\beta-1)\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}a_2\,\frac{x_2^{\beta-1}}{x_2}$$
$$=\left((1-\beta)\frac{\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}}{\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)}a_2x_2^{\beta-1}a_2x_2^{\beta-1}\right)+(\beta-1)\frac{1}{x_2}\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}a_2x_2^{\beta-1}$$
$$=\left((1-\beta)\frac{a_2x_2^{\beta-1}}{\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)}+(\beta-1)\frac{1}{x_2}\right)\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}a_2x_2^{\beta-1}$$
$$=\left((1-\beta)\frac{a_2x_2^{\beta-1}x_2}{\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)x_2}+(\beta-1)\frac{\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)}{\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)x_2}\right)\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}a_2x_2^{\beta-1}$$
$$=\left(\frac{(1-\beta)a_2x_2^\beta+(\beta-1)\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)}{\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)x_2}\right)\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}a_2x_2^{\beta-1}$$
$$=\left(\frac{(1-\beta)a_2x_2^\beta+(\beta-1)a_2x_2^\beta+(\beta-1)a_1x_1^\beta}{\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)x_2}\right)\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}a_2x_2^{\beta-1}$$
$$=\left(\frac{(1-\beta+\beta-1)a_2x_2^\beta+(\beta-1)a_1x_1^\beta}{\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)x_2}\right)\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}a_2x_2^{\beta-1}$$
$$=\left(\frac{(\beta-1)a_1x_1^\beta}{\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)x_2}\right)\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}a_2x_2^{\beta-1}\le 0$$

Car $1-\beta\le 0$ et que le reste de l'expression est positif.

$$\bar{H}=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & \left(\frac{(\beta-1)a_2x_2^\beta}{\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)x_1}\right)\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}a_1x_1^{\beta-1} & \beta\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-2}a_1x_1^{\beta-1}\beta a_2x_2^{\beta-1} \\ -2 & \beta\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-2}a_1x_1^{\beta-1}\beta a_2x_2^{\beta-1} & \left(\frac{(\beta-1)a_1x_1^\beta}{\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)x_2}\right)\left(a_1x_1^\beta+a_2x_2^\beta\right)^{1/\beta-1}a_2x_2^{\beta-1} \end{bmatrix}$$

$$\det(\bar{H}) = \underbrace{-(-2)}_{+}\underbrace{\left|\underbrace{-2\underbrace{\left|\frac{\overbrace{(\beta-1)}^{\leq 0}a_1 x_1^{\beta}}{\left(a_1 x_1^{\beta}+a_2 x_2^{\beta}\right)x_2}\right|\left(a_1 x_1^{\beta}+a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1}a_2 x_2^{\beta-1}}_{\leq 0}}_{\geq 0}-(-2)\underbrace{\beta\left(a_1 x_1^{\beta}+a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-2}a_1 x_1^{\beta-1}\beta a_2 x_2^{\beta-1}}_{>0}\right|}_{>0}$$

$$-2\underbrace{\left|\underbrace{-2\underbrace{\beta\left(a_1 x_1^{\beta}+a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-2}a_1 x_1^{\beta-1}\beta a_2 x_2^{\beta-1}}_{>0}}_{<0}-(-2)\underbrace{\left|\frac{\overbrace{(\beta-1)}^{\leq 0}a_2 x_2^{\beta}}{\left(a_1 x_1^{\beta}+a_2 x_2^{\beta}\right)x_1}\right|\left(a_1 x_1^{\beta}+a_2 x_2^{\beta}\right)^{1/\beta-1}a_1 x_1^{\beta-1}}_{\leq 0}\right|}_{<0}$$

> 0

Pour le signe on a

$= 2\big((\geq 0)+(>0)\big)-2\big((<0)+(\leq 0)\big)$

$= 2\big((\geq 0)+(>0)\big)+2\big((>0)+(\geq 0)\big)$

> 0

Bingo! Donc maximum!!!!!

m=1	n=2	**Pour un maximum** $\bar{m}_3 \equiv \det(\bar{H}_3) > 0$ (le dernier) m **impair** : Premier de **signe positif** n **pair** : Dernier de **signe positif**	**Pour un minimum** $signe(\bar{m}_p) = signe\left((-1)^m\right) = signe\left((-1)^1\right)$ $\bar{m}_3 < 0$ **signe négatif** (le dernier)