

Important : Montrez bien vos calculs, démonstrations et explications pour toutes les questions et ordonnez bien votre devoir.

Il y aura normalement 3 travaux/quiz durant la session, si c'est effectivement le cas je vais prendre les 2 meilleures notes sur les 3.

**Q1. Analyse** : Avec la définition suivante (que l'on applique ici génériquement aux fonctions, aux applications, aux relations ou aux correspondances),

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

et les diverses expressions suivantes :

$$\text{I) } y = f(x) = 5 \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{II) } y = f(x) = \begin{cases} -\log(-x) & \text{si } x < 0 \\ 4 & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ 6 & \text{si } 4 < x \leq 6 \\ (x-2)^3 \text{ et } 6 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

$$\text{III) } y = f(x) = 4 \left( \frac{\cos(x)}{x} \right) + 4$$

$$\text{IV) } y = f(x) = 2x^3 + 4x + 8$$

Répondez aux diverses questions suivantes pour chacune des expressions ci-haut.

- Tracez le graphique de la fonction (ou relation).
- Quel est le domaine de définition de la fonction (ou relation)?
- Quelle est l'image (le range en anglais) de la fonction (ou relation)?
- Est-ce que la fonction (ou relation) est injective?
- Est-ce que la fonction (ou relation) est surjective?
- Est-ce que la fonction (ou relation) est bijective?
- Dites si la fonction (ou relation) est monotone croissante (strictement ou non-strictement), monotone décroissante (strictement ou non-strictement) ou si elle n'est pas monotone.
- Dites si la fonction (ou relation) est continue.
- Donnez la ou les valeur(s) de discontinuité(s) éliminable(s) ou non-éliminable(s) si c'est le cas.

j) Donnez la  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

k) Dites si la fonction (ou relation) est concave (strictement ou non-strictement) ou convexe (strictement ou non-strictement) ou ni l'un ni l'autre.

l) Donnez les éléments suivants :  $\max f(x)$ ,  $\min f(x)$ ,  $\sup(f(x))$ ,  $\inf(f(x))$

m) Donnez le maximum ou les maxima  $(x^*, f(x^*))$  s'il y en a. Dites aussi s'il(s) est(sont) local(locaux) ou global(globaux) et s'il(s) est(sont) unique ou multiples.

n) Donnez le minimum ou les minima  $(x^*, f(x^*))$  s'il y en a. Dites aussi s'il(s) est(sont) local(locaux) ou global(globaux) et s'il(s) est(sont) unique ou multiples.

o) Dites si la fonction (ou relation) est dérivable (différentiable).

**Q2. Optimisation sans contrainte** : Optimisez les fonctions

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

suivantes. Donnez le maximum ou les maxima et le minimum ou les minima  $(x^*, f(x^*))$ . Dites aussi s'il(s) est(sont) local(locaux) ou global(globaux) et s'il(s) est(sont) unique ou multiples. Montrez les C.P.O. et les C.D.O.

a)  $f(x) = 5x - (x - 10)^2 + 500$

b)  $f(x) = (x - 2)(x + 3)$

c)  $f(x) = e^x - x^3 - x$

d)  $f(x) = \cos(x) - e^x$

**Q3. Suites** : Trouvez les limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  des suites (séquences)  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  suivantes avec :

a)  $x_n = \frac{n + 100}{n - 10}$

b)  $x_n = \left( \frac{n + 100}{n + 1} \right)^n$