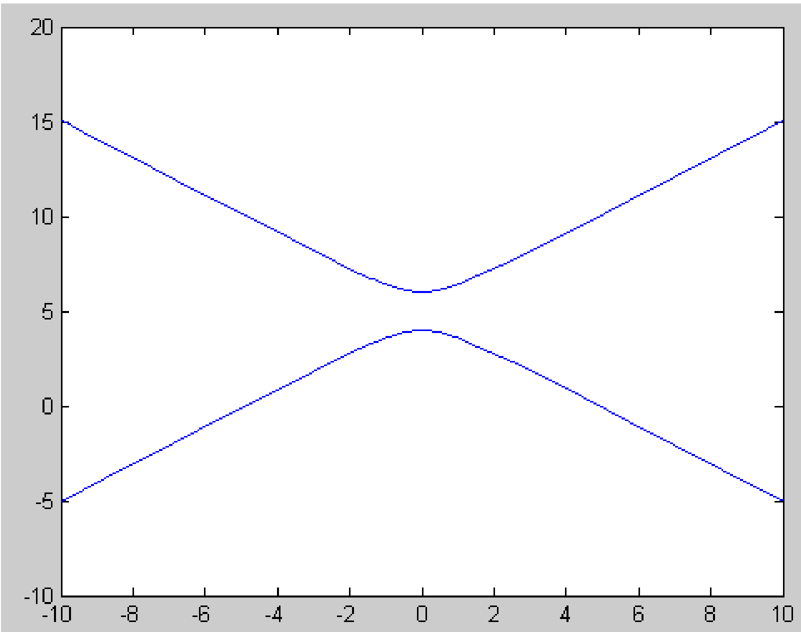
**Devoir 1 à remettre le vendredi 15 mars avant 14h01** v1.1 **Attention il peut y avoir des errata**

**Q1. Analyse** : Avec la définition suivante (que l'on applique ici génériquement aux fonctions, aux applications, aux relations ou aux correspondances),

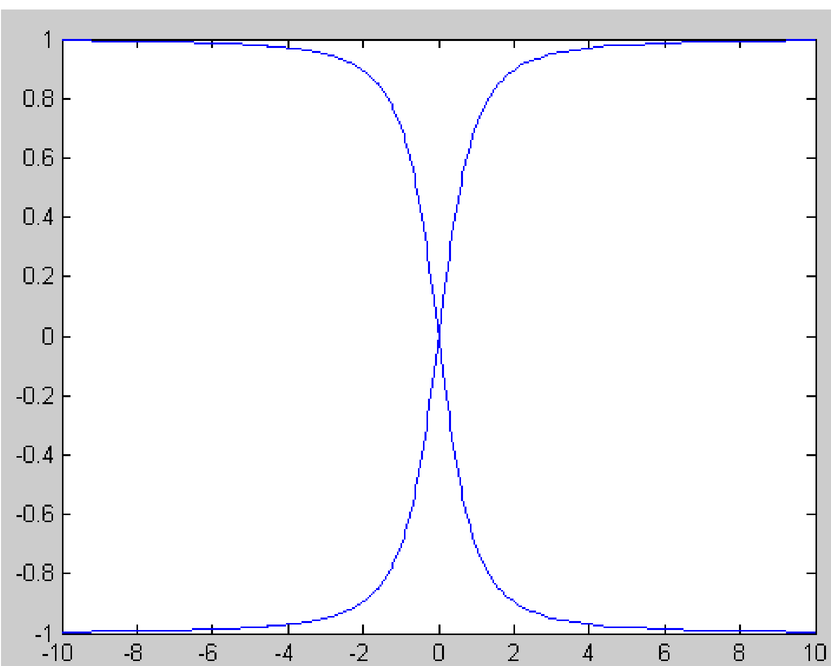
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

et les diverses expressions suivantes :

**I)** $y = f(x) = 5 \pm \sqrt{x^2 + 1} = 5 \pm (x^2 + 1)^{1/2}$

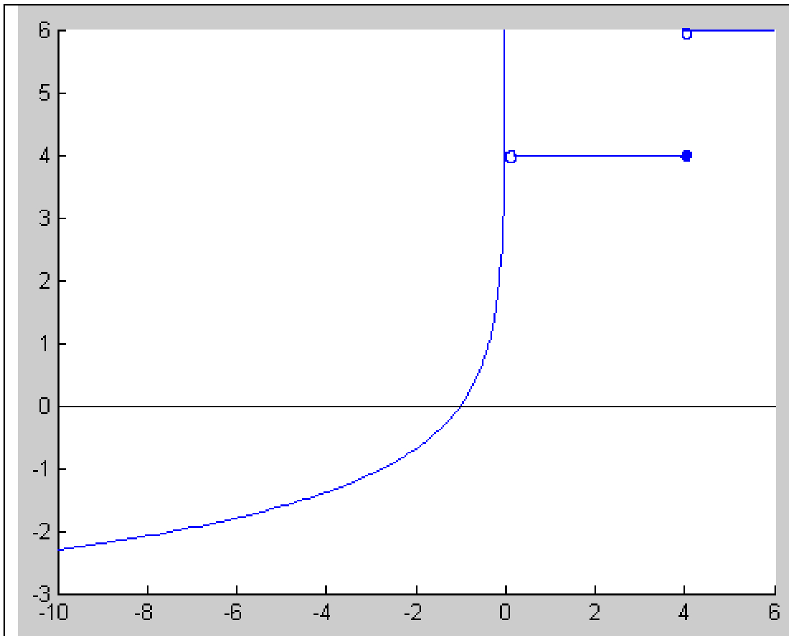



$f'(x) = \pm(1 / 2)(x^2 + 1)^{1/2-1}2x^{2-1} = \pm(x^2 + 1)^{-1/2}x$ partie +

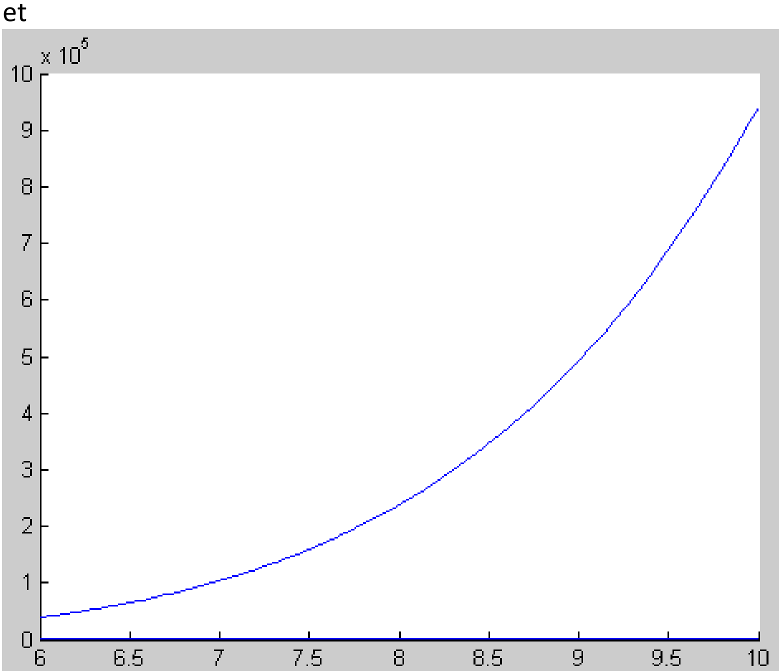



partie -

**II)** $y = f(x) = \begin{cases} -\log(-x) & \text{si } x < 0 \\ 4 & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ 6 & \text{si } 4 < x \leq 6 \\ (x-2)^3 \text{ et } 6 & \text{si } x > 6 \end{cases}$

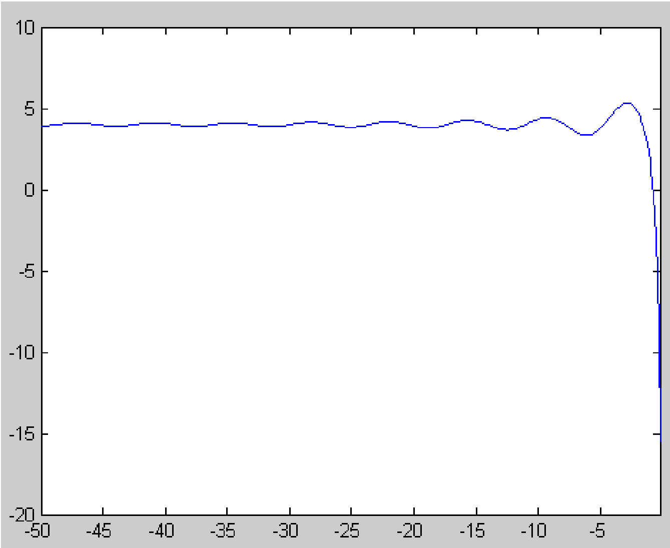
| | |
|---|---|
|   | on ne le voit pas sur le graphe mais il y a une asymptote vers x=0, f(x) diverge vers + l'infini lorsque x approche 0 par la gauche |

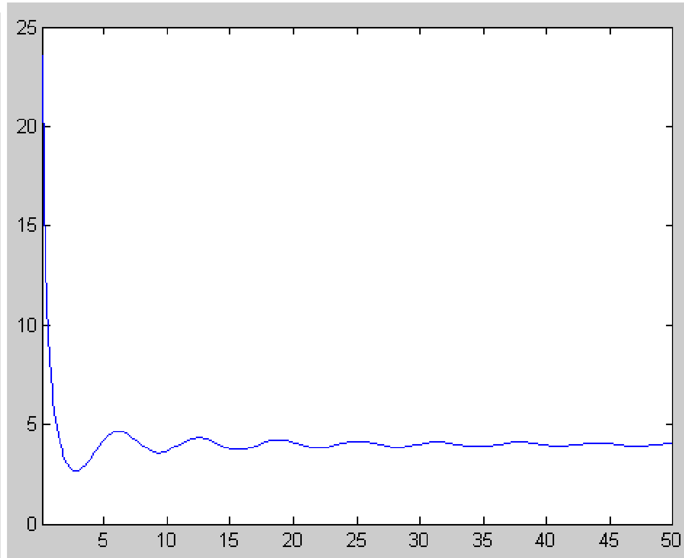
et



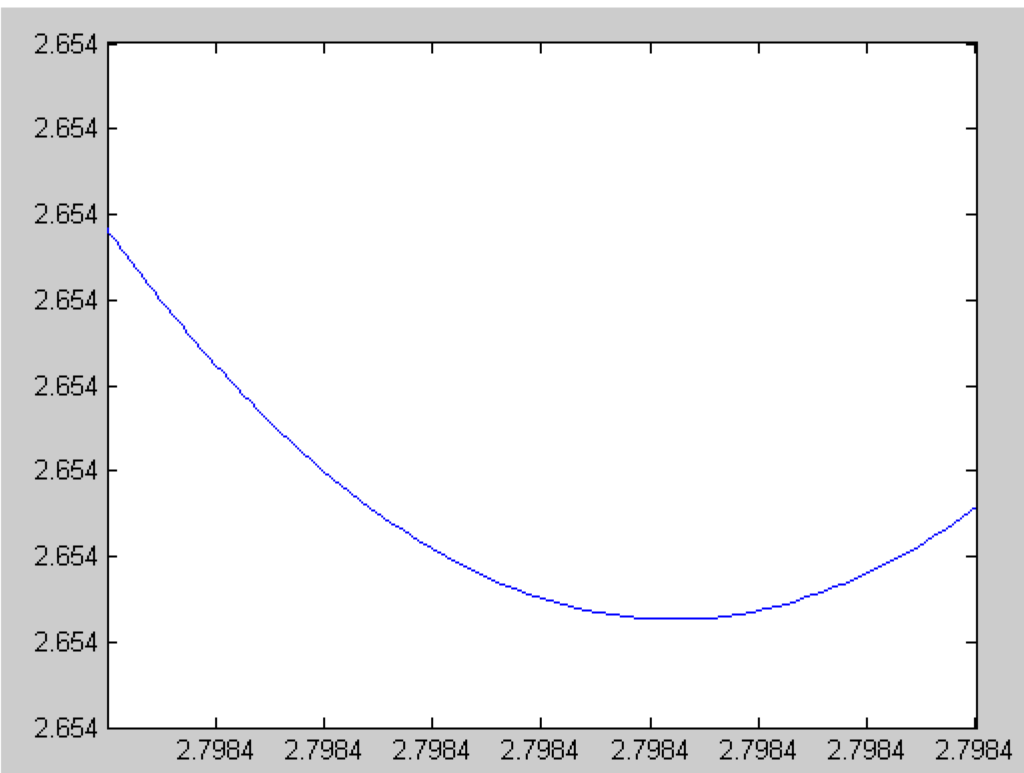

quand x=6+epsilon y=$(34)^3$+epsilon =39304+…
et 6

**III)** $y = f(x) = 4\left(\dfrac{\cos(x)}{x}\right) + 4$



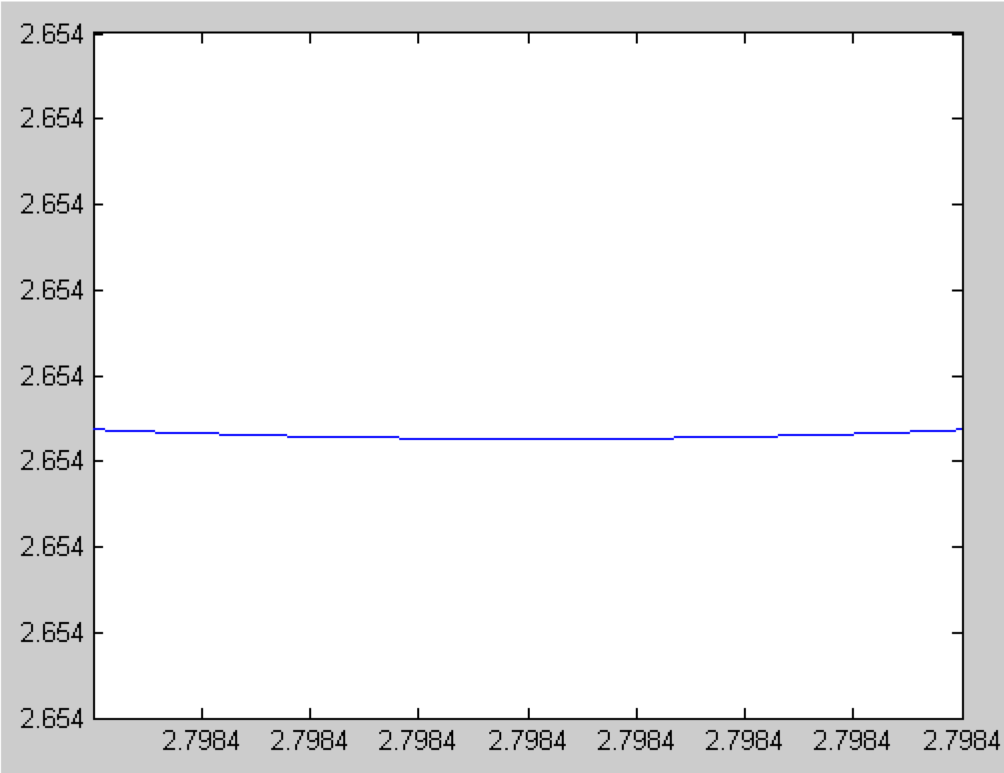




Pour un des min local



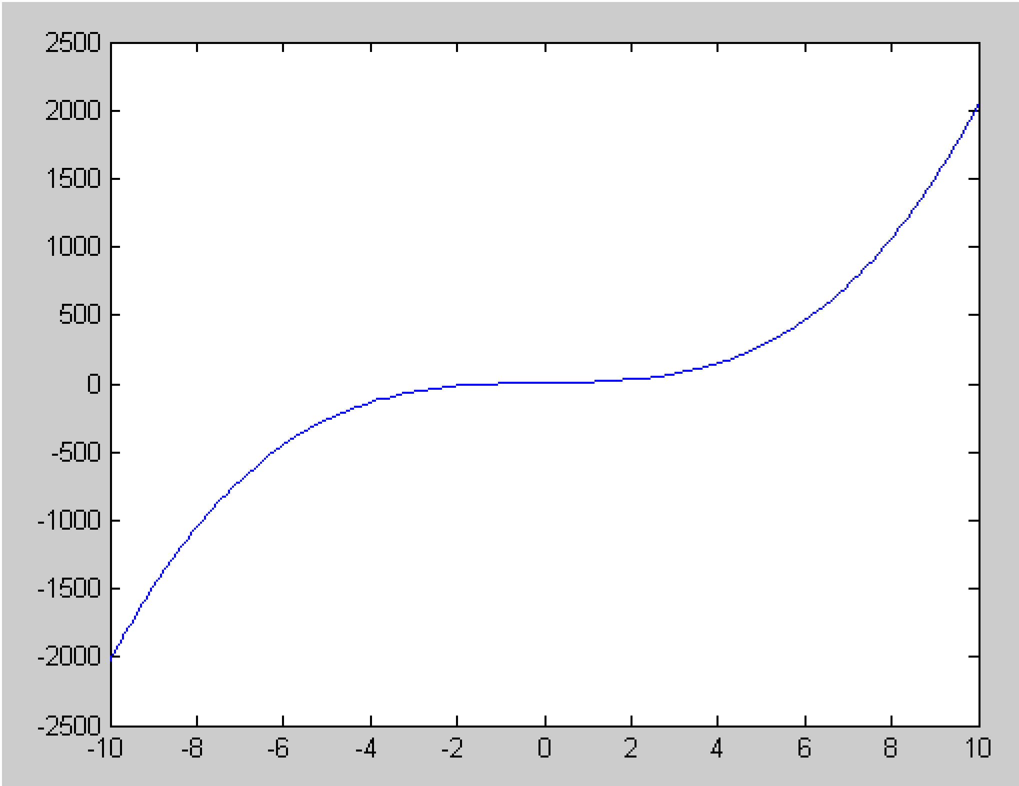

fplot('4*(cos(x)/x)+4',[2.79836,2.7984])

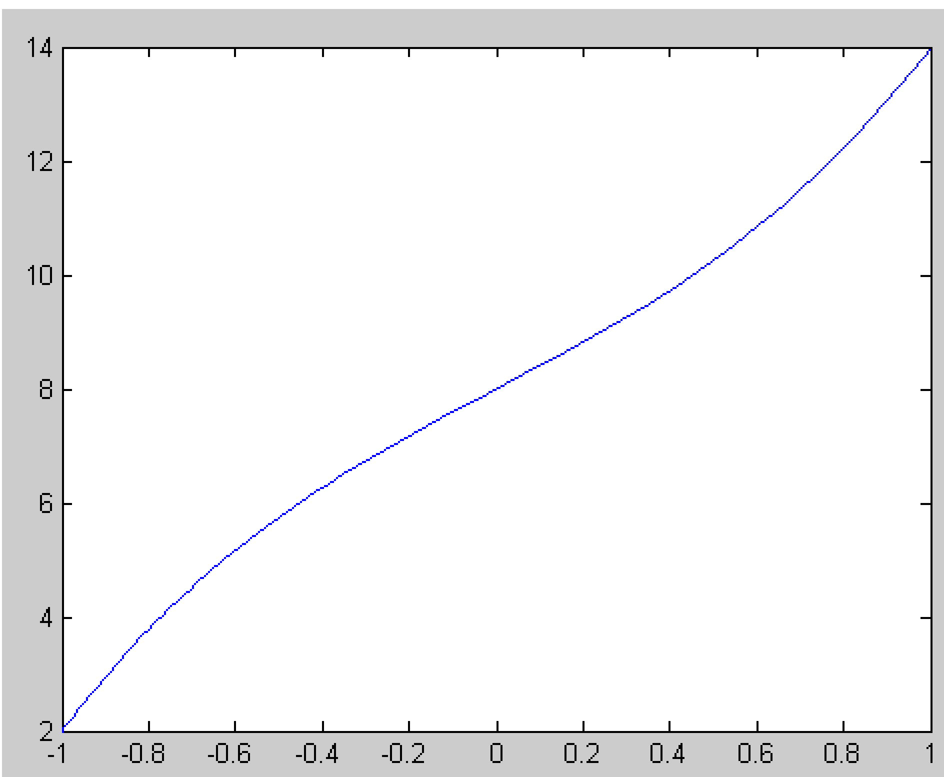
Avec plus de précision




fplot('4*(cos(x)/x)+4',[2.798382,2.79839])

**IV)** $y = f(x) = 2x^3 + 4x + 8$



Répondez aux diverses questions suivantes pour chacune des expressions ci-haut.

a) Tracez le graphique de la fonction (ou relation).

b) Quel est le domaine de définition de la fonction (ou relation)?

$D_f$

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}$ |

c) Quelle est l'image (le range en anglais) de la fonction (ou relation)?

$\operatorname{Im} f \equiv R_f$

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R} \setminus ]4,6[$ ou<br>$]-\infty,4] \cup [6,+\infty[$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |

d) Est-ce que la fonction (ou relation) est injective?

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| non | non | non | oui |

e) Est-ce que la fonction (ou relation) est surjective?

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| non | oui | oui | oui |

f) Est-ce que la fonction (ou relation) est bijective?

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| Non | Non | non | oui |

g) Dites si la fonction (ou relation) est monotone croissante (strictement ou non-strictement), monotone décroissante (strictement ou non-strictement) ou si elle n'est pas monotone.

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| Non<br>n'est pas monotone | Non<br>n'est pas monotone<br>après zéro on tombe | Non<br>n'est pas monotone | oui<br>monotone croissante<br>(strictement |

h) Dites si la fonction (ou relation) est continue. i) Donnez la ou les valeur(s) de discontinuité(s) éliminable(s) ou non-éliminable(s) si c'est le cas.

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| Oui pour chaque partie<br>prise individuellement<br>Non en général | non Sauts et discontinuités<br>non éliminables<br>asymptote à x=0 puis saut | Non asymptote avec saut,<br>discontinuité non<br>éliminable en x=0 | Oui Bingo! |

j) Donnez la $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| Non-définie<br>Diverge | Non-définie<br>diverge | 4 pour les deux cas<br>convergence avec oscillations, non monotone | Non-définie<br>diverge |

k) Dites si la fonction (ou relation) est concave (strictement ou non-strictement) ou convexe (strictement ou non-strictement) ou ni l'un ni l'autre.

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| ni l'un ni l'autre | ni l'un ni l'autre | ni l'un ni l'autre | ni l'un ni l'autre |

l) Donnez les éléments suivants : $\max f(x), \quad \min f(x), \quad \sup(f(x)), \quad \inf(f(x))$

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| Max | Non | 4 $\text{si } 0 < x \leq 4$ localement<br>6 $\text{si } 4 < x \leq 6$ localement | Local une infinité<br>Exemple<br>Entre -2.79839<br>Et -2.798382 | non |
| Min | Non | 4 $\text{si } 0 < x \leq 4$ localement<br>6 $\text{si } 4 < x \leq 6$ localement<br>6 si $\text{si } x > 6$ pour la partie du bas localement | Local une infinité<br>Exemple<br>Entre 2.798382<br>et 2.79839 | non |
| Sup | Non | Non pour tout le domaine<br>4 $\text{si } 0 < x \leq 4$ localement<br>6 $\text{si } 4 < x \leq 6$ localement | Non pour tout le domaine | non |
| Inf | Non | Non pour tout le domaine<br>4 $\text{si } 0 < x \leq 4$ localement<br><br>6 $\text{si } 4 < x \leq 6$ localement<br>6 si $\text{si } x > 6$ pour la partie du bas | Non pour tout le domaine | non |

I)

$$f'(x) = \pm(1/2)(x^2+1)^{1/2-1}2x^{2-1} = \pm(x^2+1)^{-1/2}x \;\; = 0$$

Donne deux équations

$(x^2+1)^{-1/2}x \;\; = 0$ seule solution x=0

$-(x^2+1)^{-1/2}x \;\; = 0$ seule solution x=0

Mais pas des max ou min pour la relation car divergence de la relation à + et – l'infinie.
(Pour la partie du haut on a un min et pour la partie du bas un max)

II) locaux par intervalles

III)

Tous les $\left(x^*, f(x^*)\right)$ maxima locaux sont caractérisés par

$$f'(x^*) = 4\left(-\sin(x^*)\cdot x^{*-1} - \cos(x^*)\cdot x^{*-2}\right) = 0$$

Et

$$f''(x^*) = \left.\frac{d\left(4\left(-\sin(x)\cdot x^{-1} - \cos(x)\cdot x^{-2}\right)\right)}{dx}\right|_{x=x^*}$$

$$= 4\left(-\cos(x)\cdot x^{-1} + \sin(x)\cdot x^{-2}\right) + 4\left(\sin(x)\cdot x^{-2} + 2\cos(x)\cdot x^{-3}\right)\Big|_{x=x^*} < 0$$

Tous les $\left(x^*, f(x^*)\right)$ minima locaux sont caractérisés par

$$f'(x^*) = 4\left(-\sin(x^*)\cdot x^{*-1} - \cos(x^*)\cdot x^{*-2}\right) = 0$$

Et

$$f''(x^*) = \left.\frac{d\left(4\left(-\sin(x)\cdot x^{-1} - \cos(x)\cdot x^{-2}\right)\right)}{dx}\right|_{x=x^*}$$

$$= 4\left(-\cos(x)\cdot x^{-1} + \sin(x)\cdot x^{-2}\right) + 4\left(\sin(x)\cdot x^{-2} + 2\cos(x)\cdot x^{-3}\right)\Big|_{x=x^*} > 0$$

IV)

$$y = f(x) = 2x^3 + 4x + 8$$

$CPO : f'(x) = 6x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4/6 \Rightarrow x = \sqrt{-4/6}$ pas dans les réels!

m) Donnez le maximum ou les maxima $\left(x^*, f(x^*)\right)$ s'il y en a. Dites aussi s'il(s) est(sont) local(locaux) ou global(globaux) et s'il(s) est(sont) unique ou multiples.

Voir plus haut

n) Donnez le minimum ou les minima $\left(x^*, f(x^*)\right)$ s'il y en a. Dites aussi s'il(s) est(sont) local(locaux) ou global(globaux) et s'il(s) est(sont) unique ou multiples.

Voir plus haut

o) Dites si la fonction (ou relation) est dérivable (différentiable).

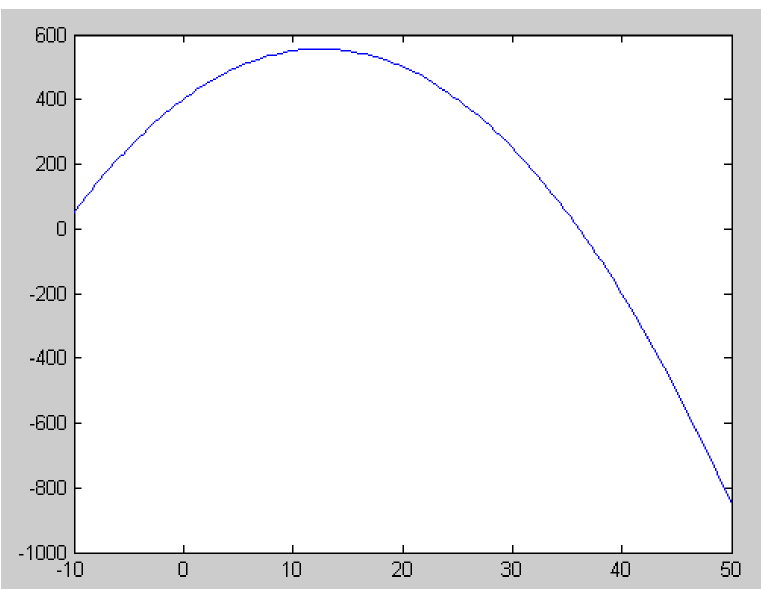
| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| Pas selon la définition standard mais par partie haut et bas oui | Non car pas continue, sur des intervalles particulier oui | Oui sur le domaine $D_f = \mathbb{R}^*$ Pas à x=0 | Oui sur $\mathbb{R}$ |

**Q2. Optimisation sans contrainte** : Optimisez les fonctions

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

suivantes. Donnez le maximum ou les maxima et le minimum ou les minima $\left(x^*, f(x^*)\right)$ . Dites aussi s'il(s) est(sont) local(locaux) ou global(globaux) et s'il(s) est(sont) unique ou multiples. Montrez les C.P.O. et les C.D.O.

a) $f(x) = 5x - (x-10)^2 + 500$

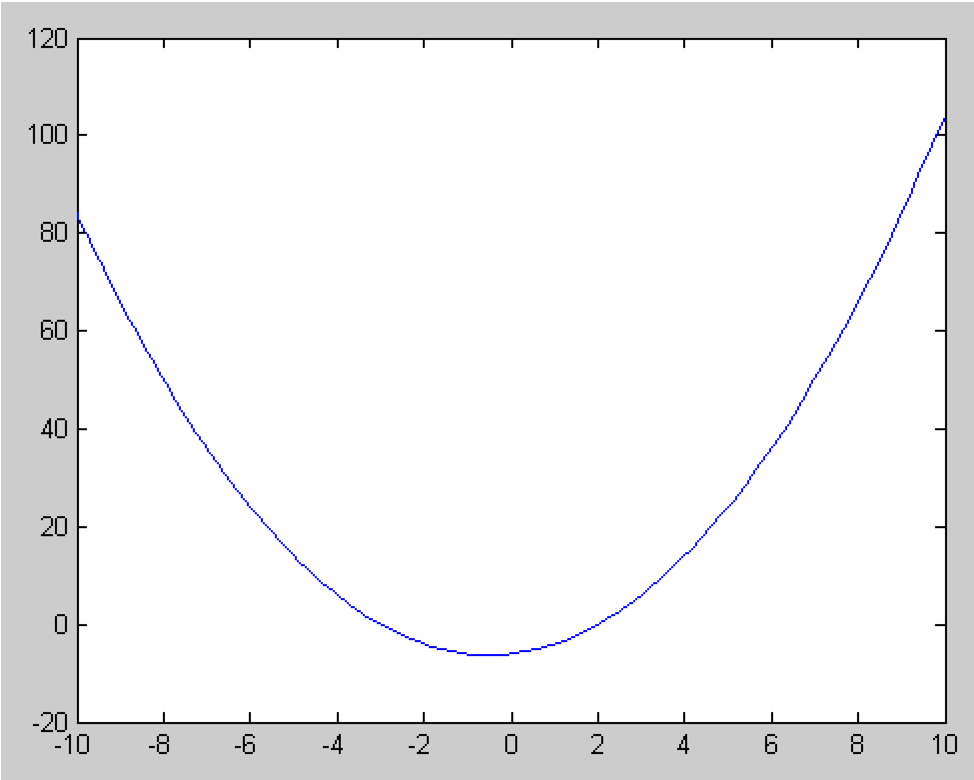



CPO $\quad f'(x^*) = 5 - 2(x^* - 10) = 0 \Rightarrow 25 - 2x^* = 0 \Rightarrow x^* = 12.5$

CDO

$f''(x^*) = -2 < 0$ implique un maximum global dans ce cas unique

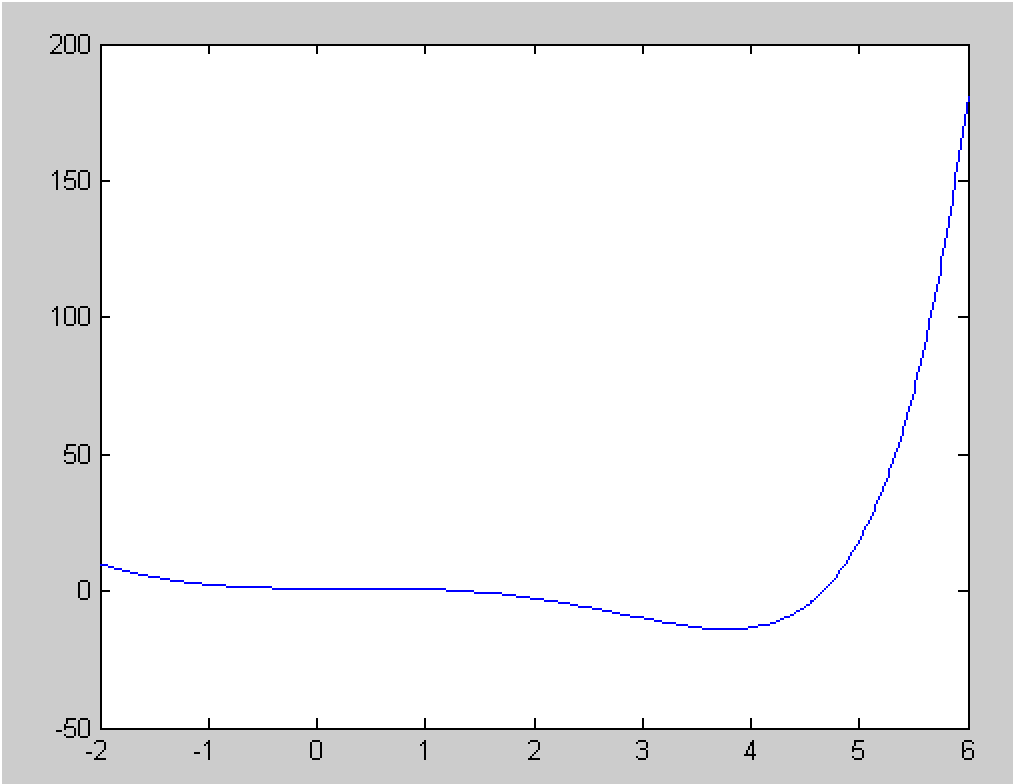
b) $f(x) = (x-2)(x+3)$

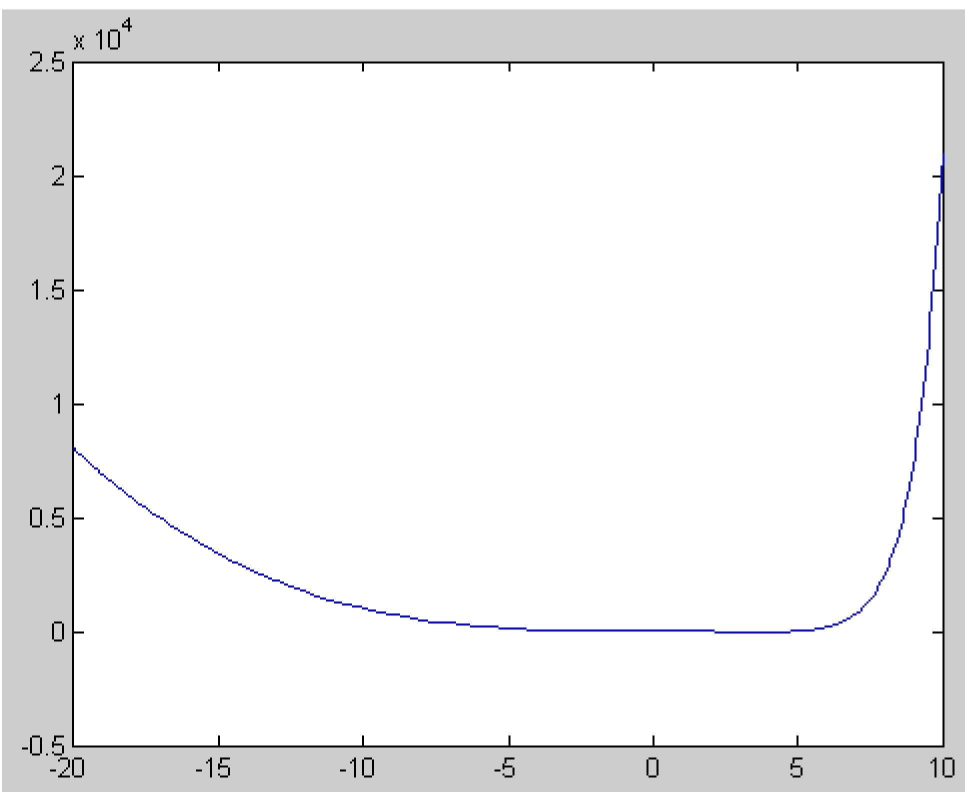


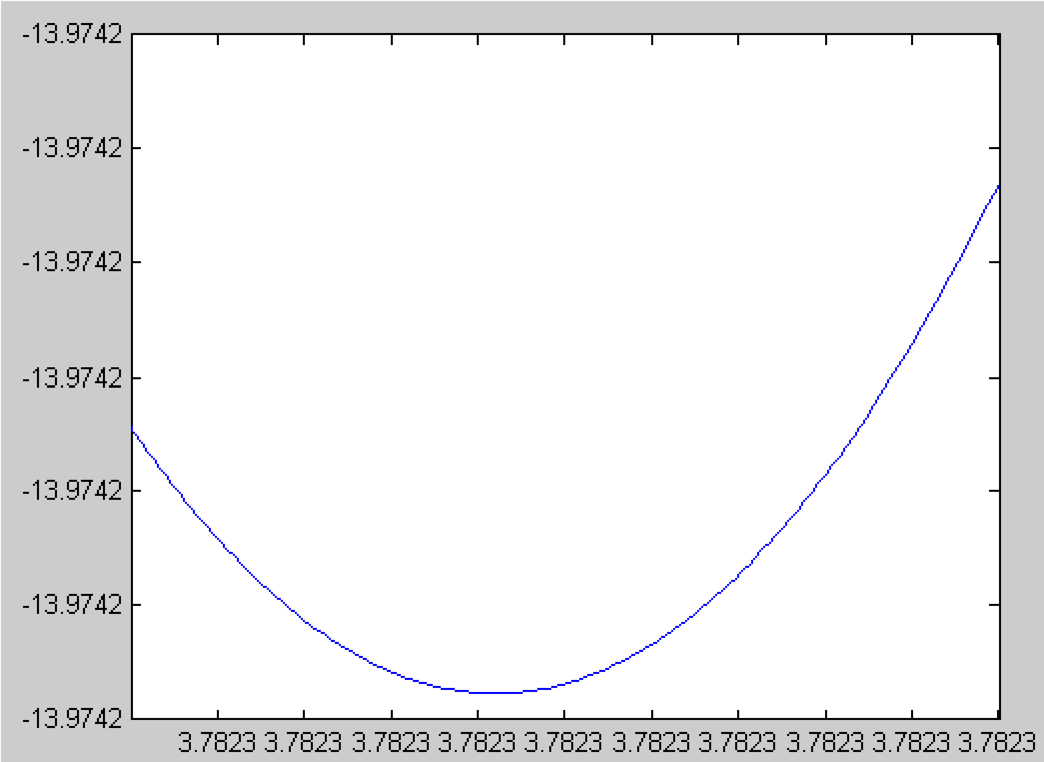

CPO : $f'(x^*) = \left.\dfrac{d\big((x-2)(x+3)\big)}{dx}\right|_{x=x^*} = \left.\dfrac{d\big((x^2+x-6)\big)}{dx}\right|_{x=x^*} = 2x^* + 1 = 0 \Rightarrow x^* = -1/2$

CDO : $f''(x^*) = \left.\dfrac{d\big(2x+1\big)}{dx}\right|_{x=x^*} = 2 > 0$ donc minimum global unique dans ce cas

c) $f(x) = e^x - x^3 - x$






fplot('exp(x)-x^3-x',[3.7823,3.78235])

CPO

$$f'(x^*) = \left.\frac{d(e^x - x^3 - x)}{dx}\right|_{x=x^*} = e^{x^*} - 3x^{*2} - 1 = 0$$

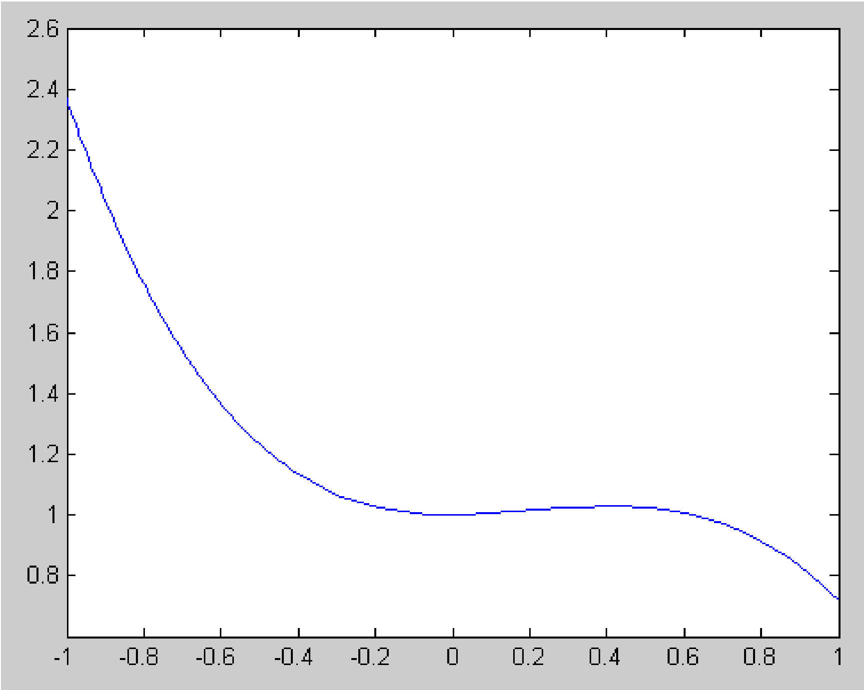
Par tâtonnement, entre 3.7823 et 3.78235 **minimum global unique**

CDO

$$f''(x^*) = \left.\frac{d^2(e^x - x^3 - x)}{dx^2}\right|_{x=x^*} = e^{x^*} - 6x^* > 0$$ environ 21.2231 donc minimum global unique

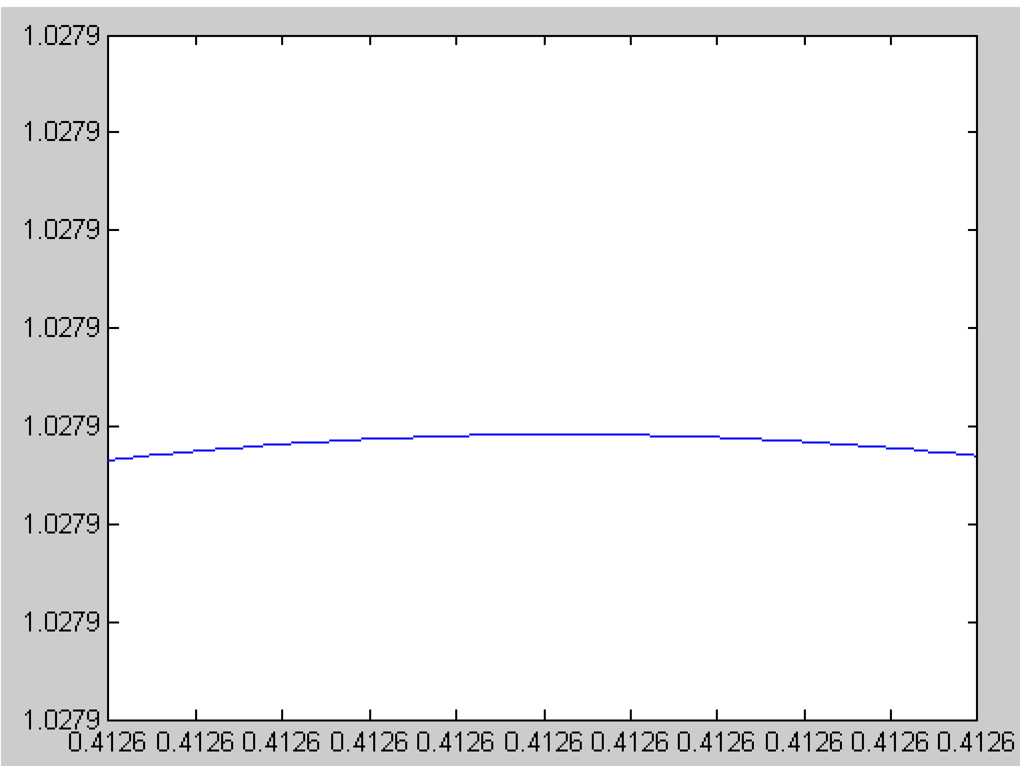
Aussi x*=0 pour un **minimum local**

Et

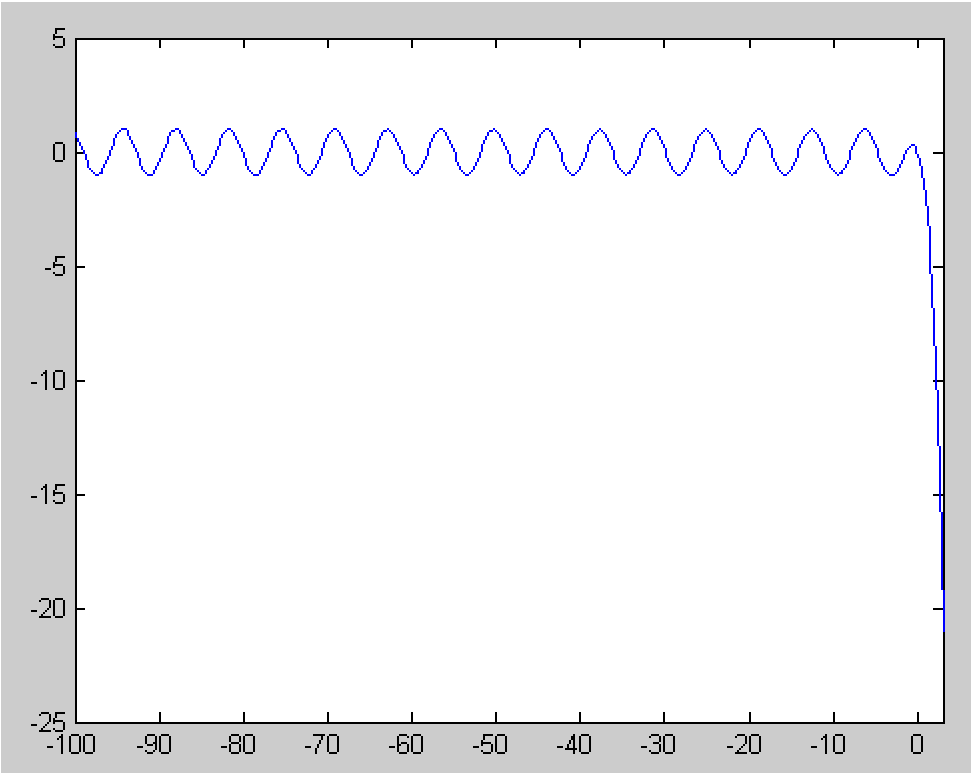



Entre 0.41262 et 0.41263 pour un **maximum local**

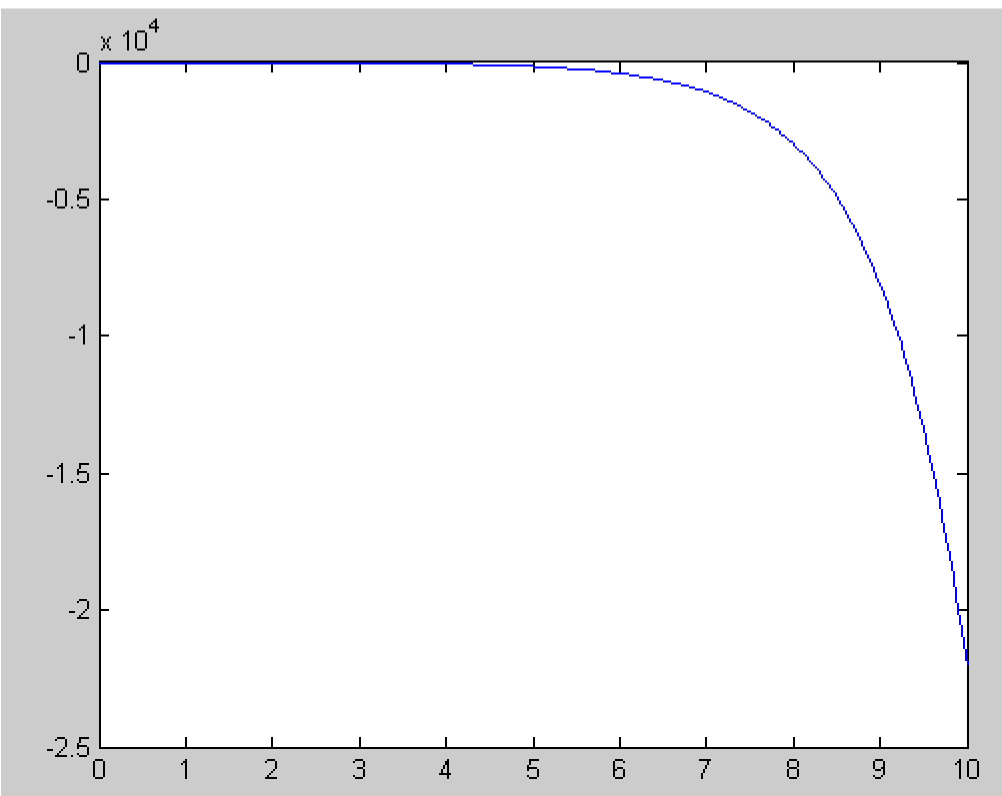
fplot('exp(x)-x^3-x',[0.41262,0.41263])



d) $f(x) = \cos(x) - e^x$



5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-100
-90
-80
-70
-60
-50
-40
-30
-20
-10
0

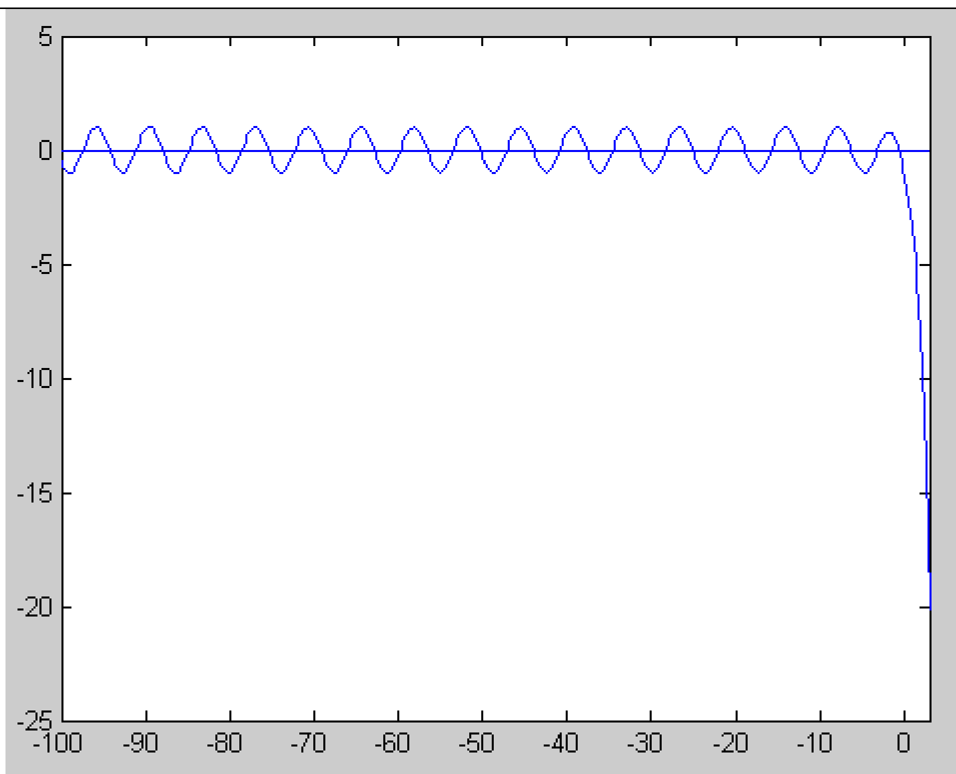
x 10^4
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Pas d'extremum global (minimun ou maximum)

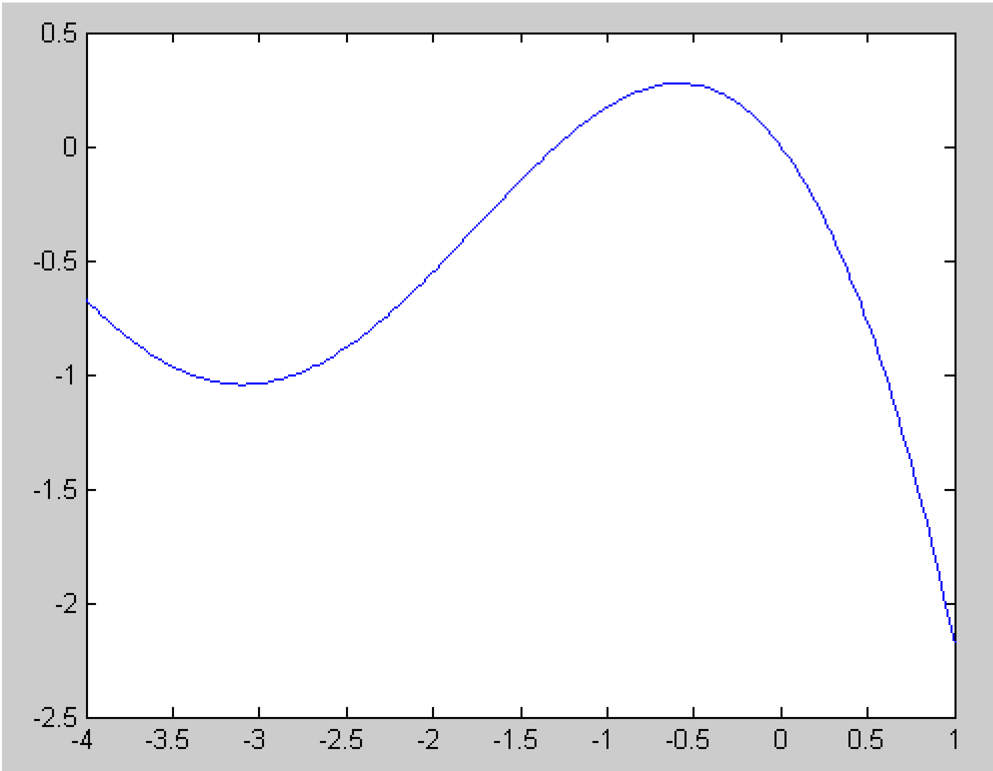
Localement une infinité d'extrema (minima ou maxima)

| | |
|---|---|
| Tous les $\left(x^*, f(x^*)\right)$ maxima locaux sont caractérisés par<br>CPO $f'(x^*) = -\sin(x^*) - e^{x^*} = 0$<br>et<br>CDO $f''(x^*) = -\cos(x^*) - e^{x^*} < 0$ | Tous les $\left(x^*, f(x^*)\right)$ minima locaux sont caractérisés par<br>CPO $f'(x^*) = -\sin(x^*) - e^{x^*} = 0$<br>et<br>CDO $f''(x^*) = -\cos(x^*) - e^{x^*} > 0$ |

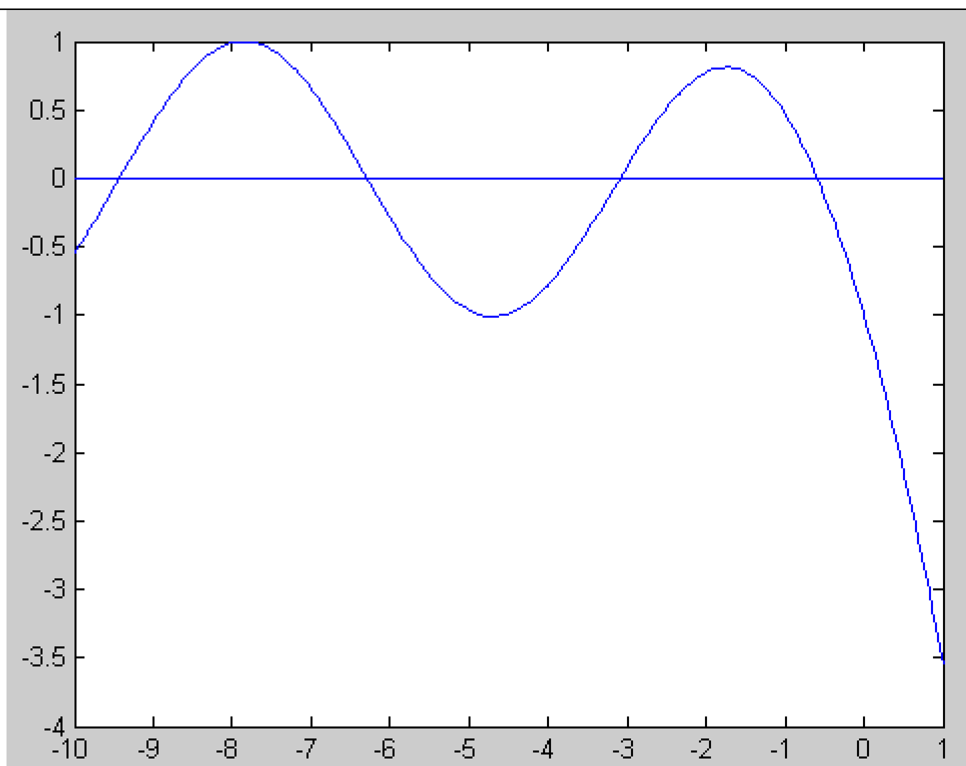
Les CPO sont présentées par l'intersection de la fonction dérivée première $f'(x)$ à 0

| | |
|---|---|
| $f'(x)$ |  |

f(x)

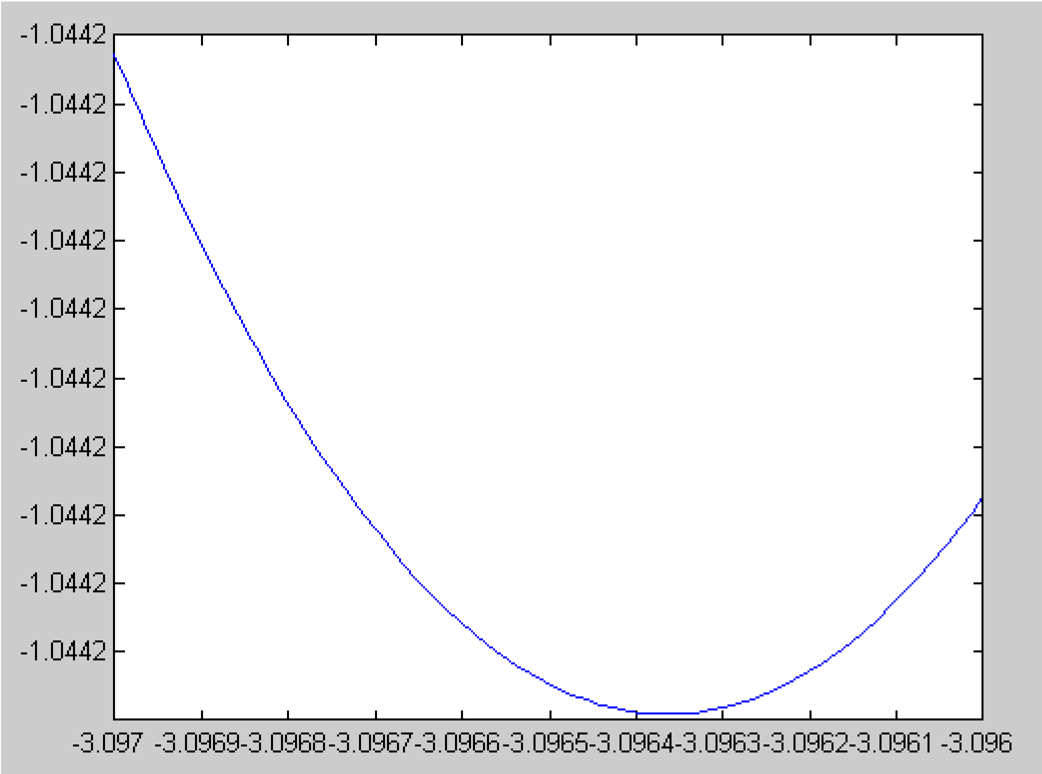



$f'(x)$




Minimum local le plus faible  entre - 3.097 et -3.096

fplot('cos(x)-exp(x)',[-3.097,-3.096])




**Q3. Suites** : Trouvez les limites $\lim_{n\to\infty} x_n$ des suites (séquences) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ suivantes avec :

a) $x_n = \dfrac{n+100}{n-10}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+100}{n-10} = \frac{\infty}{\infty}$$ forme indéterminée

Par la règle de l'hopital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{d(n+100)}{dn}}{\frac{d(n-10)}{dn}} = \frac{1}{1} = 1$$

Ou simplement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+100)\,/\,n}{(n-10)\,/\,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+(100\,/\,n)}{(1-(10\,/\,n)} = \frac{\lim_{n\to\infty}(1+(100\,/\,n)}{\lim_{n\to\infty}(1-(10\,/\,n)} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

b) $x_n = \left(\frac{n+100}{n+1}\right)^n$ Donc $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+100}{n+1}\right)^n = \left(\frac{\infty+100}{\infty+1}\right)^\infty$ semble une forme indéterminée

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+100}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\ln\left(\frac{n+100}{n+1}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\ln\left(\frac{n+100}{n+1}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{\ln\left(\frac{n+100}{n+1}\right)}{\frac{1}{n}}\right)$$

On a donc une forme $e^{\frac{\ln 1}{0}} = e^{\frac{0}{0}}$ à la limite. Donc on peut utiliser la règle de l'Hopital sur $\frac{\ln\left(\frac{n+100}{n+1}\right)}{\frac{1}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+100}{n+1}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d\ln\left(\frac{n+100}{n+1}\right)}{dn}}{\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{dn}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d\left(\ln(n+100)-\ln(n+1)\right)}{dn}}{\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{dn}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+100)}-\frac{1}{n+1}}{\left(\frac{-1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+100)}-\frac{1}{n+1}}{\left(\frac{-1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} -n^2\left(\frac{1}{(n+100)}-\frac{1}{n+1}\right)$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} -n^2\left(\frac{1}{(n+100)}-\frac{1}{(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} -n^2\left(\frac{(n+1)}{(n+100)(n+1)}-\frac{(n+100)}{(n+100)(n+1)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2(n+1)+n^2(n+100)}{(n+100)(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^3-n^2+n^3+100n^2)}{(n+100)(n+1)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{99n^2}{(n+100)(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{99n^2}{n^2+100n+n+100}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{d99n^2}{dn}}{\frac{d\left(n^2+100n+n+100\right)}{dn}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2*99n}{2n+101}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{d(2*99n)}{dn}}{\frac{d(2n+101)}{dn}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2*99}{2}\right) = 99$$

Ce qui donne $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+100}{n+1}\right)^n = e^{99}$ Le nombre d'Euler exposant numéro de Wayne Gretzky!