OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS

Sommaire

1. Composantes d'une fraction

La fraction $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ est composée d'un numérateur $(\boldsymbol{a})$ et d'un dénominateur $(\boldsymbol{b})$.

2. Fractions équivalentes

Il est important de se rappeler qu'il existe plusieurs façons de représenter la même fraction. Par exemple, les fractions $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ et $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}}$ sont tout à fait équivalentes. Mais comment passe-t-on d'une fraction à l'autre tout en conservant la relation d'équivalence ?

Une fraction reste équivalente si le numérateur *et* le dénominateur sont multipliés ou divisés par le même nombre.

Exemple

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 5}{3\times 5}=\frac{10}{15}$$

$$\frac{24}{30}=\frac{24\div 6}{30\div 6}=\frac{4}{5}$$

3. Simplification d'une fraction

Une fraction est écrite sous forme simplifiée si le numérateur et le dénominateur n'ont aucun facteur commun. En d'autres mots, sous forme simplifiée, il est impossible de trouver un nombre qui soit diviseur à la fois du numérateur et du dénominateur.

Exemple

La fraction $\frac{120}{200}$ n'est pas écrite sous forme simplifiée puisqu'il existe des nombres qui divisent 120 et 200. Le plus grand diviseur (facteur) commun de 120 et de 200 est 40, d'où

$$\frac{120}{200} = \frac{120 \div 40}{200 \div 40} = \frac{3}{5}$$

Puisque nous avons divisé le numérateur et le dénominateur par le même nombre (40), la fraction $\frac{3}{5}$ est équivalente à $\frac{120}{200}$. De plus $\frac{3}{5}$ est la forme simplifiée de $\frac{120}{200}$ puisque aucun facteur commun n'existe pour 3 et 5.

Une simplification peut s'effectuer en plusieurs étapes si on ne reconnaît pas, à prime abord, le plus grand facteur commun du numérateur et du dénominateur.

Exemple

$$\frac{108}{144} = \frac{108 \div 2}{144 \div 2} = \frac{54}{72} = \frac{54 \div 9}{72 \div 9} = \frac{6}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$$

Les amateurs du "Compte est bon" auront remarqué que 108 et 144 avaient pour facteur commun le nombre 36 :

$$\frac{108}{144} = \frac{108 \div 36}{144 \div 36} = \frac{3}{4}$$

Au bout du compte, quel que soit le nombre d'étapes effectuées, la même forme simplifiée sera trouvée…

4. Règle d'addition et soustraction de fractions

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

Le symbole $\pm$, qui se lit "plus ou moins", indique que cette règle s'applique aussi bien aux additions qu'aux soustractions.

Exemple

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{3+7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{6} = \frac{5-7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Remarquez que la règle d'addition et de soustraction des fractions n'est applicable que si les deux fractions possèdent le même dénominateur. Or, ceci ne sera généralement pas le cas. Il faudra alors créer réécrire les fractions en fractions équivalentes ayant un dénominateur commun.

Exemple

Évaluer la somme $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$

Ces fractions ne peuvent être additionnées avant de les avoir réécrites avec un dénominateur commun. Le plus petit commun multiple des nombres 3 et 5 est 15. 15 sera donc le commun dénominateur.

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} + \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$$

Exemple

Évaluer la soustraction $\frac{3}{8} - \frac{17}{24}$

Le dénominateur commun (le plus petit commun multiple) des nombres 8 et 24 est 24. La fraction $\frac{17}{24}$ ne nécessite donc réécriture. Par contre, $\frac{3}{8}$ doit être écrit de sorte que 24 soit également son dénominateur.

$$\frac{3}{8} - \frac{17}{24} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} - \frac{17}{24} = \frac{9}{24} - \frac{17}{24} = \frac{-8}{24} = \frac{-1}{3}$$

Remarque : Il peut s'avérer utile d'effectuer, si possible, une simplification des fractions avant de procéder à l'addition ou la soustraction. Une telle simplification rendra plus facile l'obtention d'un dénominateur commun.

Exemple

Évaluer la somme $\frac{9}{12}+\frac{7}{14}$

$$\frac{9}{12}+\frac{7}{14}=\frac{9\div 3}{12\div 3}+\frac{7\div 7}{14\div 7}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}$$

Dans l'exemple précédent, le dénominateur commun de 12 et 14 aurait été 84. En simplifiant d'abord chacune des fractions, les calculs ont été grandement réduits.

5. Règle de multiplication de deux fractions

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

Il est important de noter que, contrairement aux additions, la règle de multiplication n'impose aucune contrainte à la valeur des dénominateurs. C'est-à-dire que ceux-ci n'ont nul besoin d'être communs.

Exemple

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{11} = \frac{4 \times 3}{7 \times 11} = \frac{12}{77}$$

$$\frac{-3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{-3 \times 5}{2 \times 4} = \frac{-15}{8}$$

Remarque : Il peut être utile d'effectuer une simplification des fractions avant de procéder à la multiplication. En plus de pouvoir simplifier chaque fraction prise individuellement, simplifier le dénominateur d'une fraction avec le numérateur de l'autre est permis *pourvu que tous deux possèdent des facteurs communs*

Exemple

Évaluer le produit $\frac{27}{16} \times \frac{8}{81}$.

Vous remarquerez que les deux fractions en jeu, $\frac{27}{16}$ et $\frac{8}{81}$, sont déjà exprimées sous forme simplifiée. Toutefois, le dénominateur 16 et le numérateur 8 ont pour facteur commun le nombre 8. De plus, le dénominateur 81 et le numérateur 27 ont pour facteur commun le nombre 27. Il existe donc quelques simplifications possibles avant d'effectuer le produit

$$\frac{27}{16} \times \frac{8}{81} = \frac{27 \div 27}{16 \div 8} \times \frac{8 \div 8}{81 \div 27} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

6. Règle de division de deux fractions

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

La règle permet donc de transformer une division de fraction en une multiplication.

Exemple

$$\frac{2}{7} \div \frac{3}{8} = \frac{2}{7} \times \frac{8}{3} = \frac{16}{21}$$

Attention à la notation suivante qui décrit la même division :

$$\frac{{}^{2}/_{7}}{{}^{3}/_{8}} = \frac{2}{7} \times \frac{8}{3} = \frac{16}{21}$$

Quelques remarques finales

- Le fait de travailler avec des fractions ne modifie en rien la priorité des opérations.

Exemple

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{8}{15} = \frac{10}{15} + \frac{8}{15} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$$

Un nombre entier peut toujours être écrit sous forme de fraction si une opération doit être effectuée entre celui-ci et une fraction.

Exemple

$$8 - \frac{5}{3} = \frac{8}{1} - \frac{5}{3} = \frac{24}{3} - \frac{5}{3} = \frac{19}{3}$$

- Évitez de travailler avec des nombres mixtes… transformez-les plutôt en fractions simples.

Exemple

$$4^{2}/_{7} = 4 + \frac{2}{7} = \frac{28}{7} + \frac{2}{7} = \frac{30}{7}$$

7. Exercices - Opérations sur les nombres

Effectuer les calculs suivants en respectant la priorité des opérations :

a) $8 - 2 \times (3 - 2 \times 5)$

b) $4 - 2 \times (-4) + 6 \div 2$

c) $8 - 2 \times 5 + 2 \times ((-2) - 3)$

d) $(8 - 2) \times (-3) - 2 \times ((-1) - 6)$

e) $\frac{2}{7} - \frac{5}{3} \times \frac{27}{35}$

f) $\frac{5}{8} + \frac{9}{25} \div \frac{18}{15}$

g) $\frac{2}{7} - \frac{5}{3}$

h) $\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$

i) $\frac{5}{36} \times \frac{9}{25}$

j) $\frac{3}{8} \div \frac{4}{5}$

Solutions

a) 22

b) 15

c) -12

d) -4

e) -1

f) $37/40$

g) $-29/21$

h) $17/20$

i) $1/20$

j) $15/32$

FONCTIONS QUADRATIQUES, EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

Sommaire

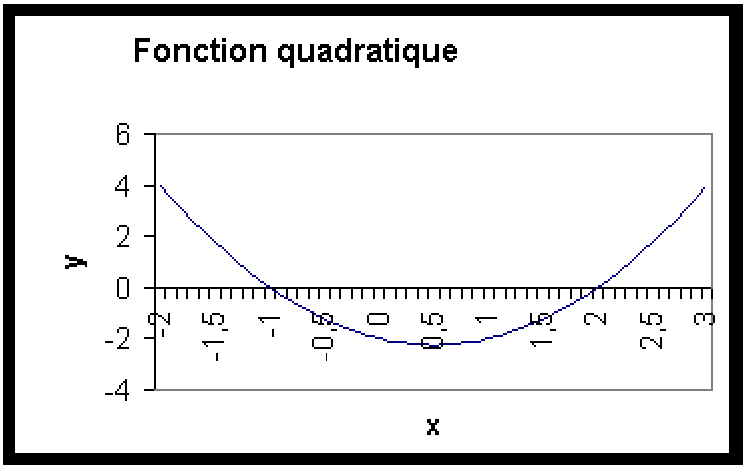
1. Paraboles

On appelle communément paraboles, ou quadratiques, les fonctions polynomiales du second degré. On reconnaît une parabole à la forme de son équation :

$$y = ax^2 + bx + c$$

Quoique nous ne nous attarderons pas très longtemps aux fonctions quadratiques, il est important de savoir les schématiser graphiquement avec suffisamment de précision.

Vous avez sûrement déjà observé dans le passé la forme très particulière d'une parabole, caractérisée par son sommet et ses "ailes"…



Comment peut-on obtenir les caractéristiques de la parabole afin de tracer le graphe de celle-ci ?

Le graphe d'une parabole peut facilement être tracé en obtenant les informations suivantes :

- Où se situe le sommet de la parabole ?
- La parabole est-elle ouverte vers le haut ou le bas ?
- Quelle est son ordonnée à l'origine ?
- La parabole a-t-elle des racines (des zéros) ?

1.1. Sommet d'une parabole

Soit $y = ax^2 + bx + c$ l'équation d'une parabole quelconque.

La valeur de x où se trouve le sommet est $x = \frac{-b}{2a}$.

La valeur de y correspondante est obtenue en substituant x dans l'équation de la parabole.

1.2. Orientation d'une parabole

L'orientation de la parabole est déterminé par le signe de "a", le coefficient de x^2.

Si $a > 0$, la parabole est ouverte vers le haut.

Si $a < 0$, la parabole est ouverte vers le bas.

Notons que si la parabole est ouverte vers le haut, son sommet correspond à un minimum alors que si elle est ouverte vers le bas, il correspond à un maximum.

1.3. Ordonnée à l'origine d'une parabole

Nous avons appris à la section à propos des droites que l'ordonnée à l'origine est la valeur prise par y lorsque $\boldsymbol{x} = 0$.

Dans le cas d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, si $\boldsymbol{x} = 0$ alors $\boldsymbol{y} = c$.

Le point $(0, c)$ est donc l'ordonnée à l'origine de la parabole.

1.4. Racines (ou zéros) d'une parabole

<u>Définition</u> : Toute valeur de x pour laquelle une fonction $y = f(x)$ prend la valeur 0 est appelée **racine**.

Pour trouver les racines d'une parabole $y = ax^2 + bx + c$, il faut résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On peut procéder par factorisation ou utiliser la formule :

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemple

Tracer le graphe de la parabole dont l'équation est $y = 2x^2 + 3x - 5$.

Sommet de la parabole:

Le sommet est situé à la position $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(2)} = \frac{-3}{4} = -0{,}75$.

et la valeur de y correspondante est $y = 2(-0{,}75)^2 + 3(-0{,}75) - 5 = -6{,}125$

le sommet se trouve donc au point $(-0{,}75\,;\ -6{,}125)$

La parabole est ouverte vers le haut puisque $a > 0$.

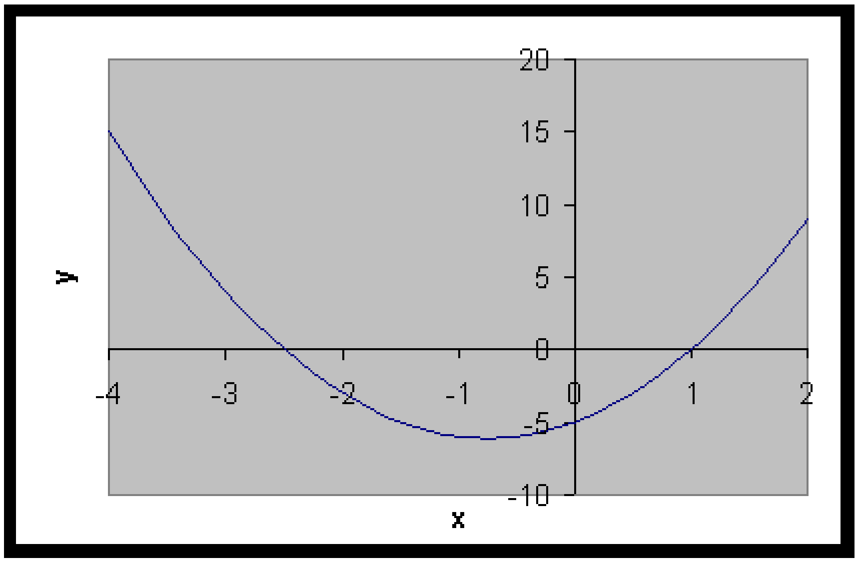
L'ordonnée à l'origine est la valeur de y obtenue lorsque $x = 0$. Dans ce cas, $y = 2(0)^2 + 3(0) - 5 = -5$. Le point $(0, -5)$ est donc l'ordonnée à l'origine.

En utilisant la formule générale $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ on obtient:

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4}$$

Ainsi, $x = 1$ et $x = -2{,}5$ sont les racines de la parabole. Les points $(-2{,}5\,;\,0)$ et $(1\,;\,0)$ se retrouvent donc sur la parabole.

En combinant toutes les informations dévoilées dans les quatre étapes ci-dessus, nous pouvons tracer précisément le graphe de la parabole $y = 2x^2 + 3x - 5$



2. Fonctions exponentielles

Définition :On appelle exponentielle de base a toute fonction dont la forme satisfait

$$f\,(x) = a^x,\text{ où } a > 0 \;\; et\; (a \neq 1).$$

Particularité : quelle que soit la valeur de a, une fonction exponentielle passera toujours par l'ordonnée à l'origine $(0{,}1)$.

Domaine : Une fonction exponentielle est définie pour toute valeur de x, d'où

$$Dom(a^x) = \mathbb{R}$$

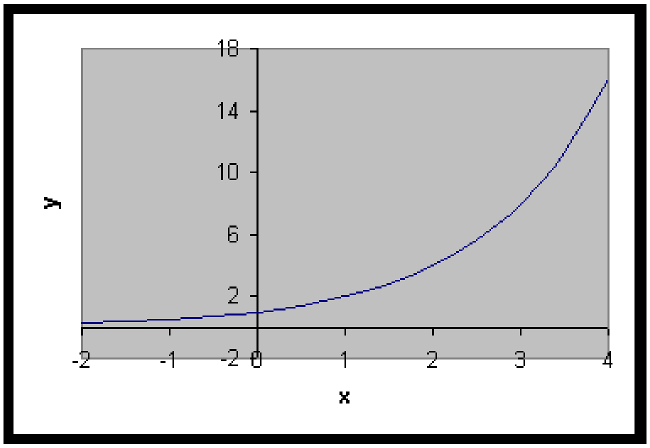
Image : Quelles que soient les valeurs de a et x, une fonction exponentielle demeure strictement positive, d'où

$$Im(a^x) = \{y \mid y > 0\}$$

Comportement d'une fonction exponentielle : Une fonction exponentielle a un comportement monotone. Elle est

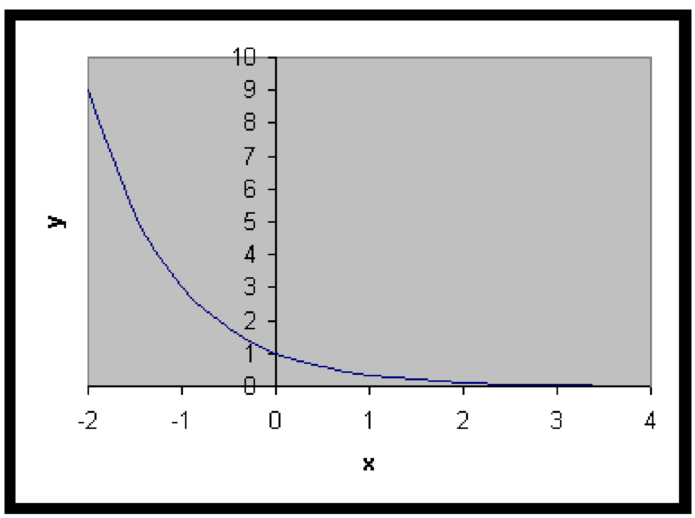
- strictement croissante si $a > 1$

Graphique de la fonction $y = 2^x$



- strictement décroissante si $0 < x < 1$

Graphique de la fonction $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Remarque : une fonction exponentielle, quelle que soit la valeur de a, ne possède *aucune racine*.

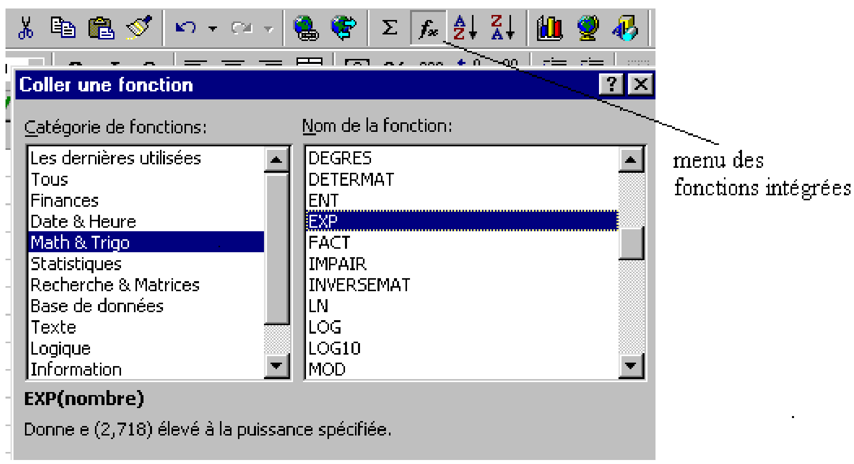
La valeur particulière $a = e = 2{,}71828 \ldots$, appelée base népérienne ou naturelle, est la plus connue et la plus exploitée des fonctions exponentielles.

La fonction $f(x) = e^x$ possède les mêmes caractéristiques que toute autre fonction exponentielle dont la base $a > 1$.

2.1. Utilisation d'Excel dans le calcul de la fonction exponentielle e^x

Le logiciel Excel est muni de fonctions intégrées permettant le calcul rapide de fonctions exponentielles en base népérienne

Sur une feuille Excel, sélectionner l'icône $\boldsymbol{f_x}$ et la catégorie de fonctions **Math & Trigo.** Choisir la fonction EXP



Une fenêtre de dialogue s'ouvrira et vous demandera quelle valeur vous souhaitez donner à l'exposant.

Exercice

Soit la fonction exponentielle $f(x) = e^x$. Calculer, à l'aide d'Excel, les valeurs suivantes :

a. $f\ (1)$
b. $f\ (3)$
c. $f\ (-1)$
d. $f\ (-3/2)$

(réponses : $f(1) = e^1 = 2{,}71828$; $f(3) = e^3 = 20{,}0855$;
$f(-1) = e^{-1} = 0{,}3679$; $f(\frac{-3}{2}) = e^{\frac{-3}{2}} = 0{,}2231$).

2.2. Loi des exposants

Un certain nombre de propriétés des exposants seront nécessaires afin d'effectuer des manipulations algébriques. Voici la liste des lois les plus importantes :

1) $a^m a^n = a^{m+n}$

2) $a^0 = 1$

3) $(a^m)^n = a^{mn}$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

6) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

7) $(ab)^m = a^m b^m$

Exercice

À l'aide des lois des exposants, simplifier les expressions algébriques suivantes :

$a)\ \frac{x^2x^4}{x^3}$

$b)\ \sqrt{16y^2x^2}$

$c)\ \frac{2x^4y^3}{8y^5x^2}$

$$d)\ \frac{z^3(y\sqrt{x})^2}{xyz}$$

3. Fonctions logarithmiques

Si on vous disait que $e^x = 3$, comment feriez-vous pour trouver la valeur de x ? La réponse à cette question est donnée par la définition suivante :

Définition : Le logarithme naturel (ou néperien), ln x, est la fonction inverse de la fonction exponentielle e^x . Ainsi, $\ln(e^x) = x$ et $e^{lnx} = x$

Domaine : La fonction logarithmique $ln\, x$ est définie pour toute valeur strictement positive de x, d'où

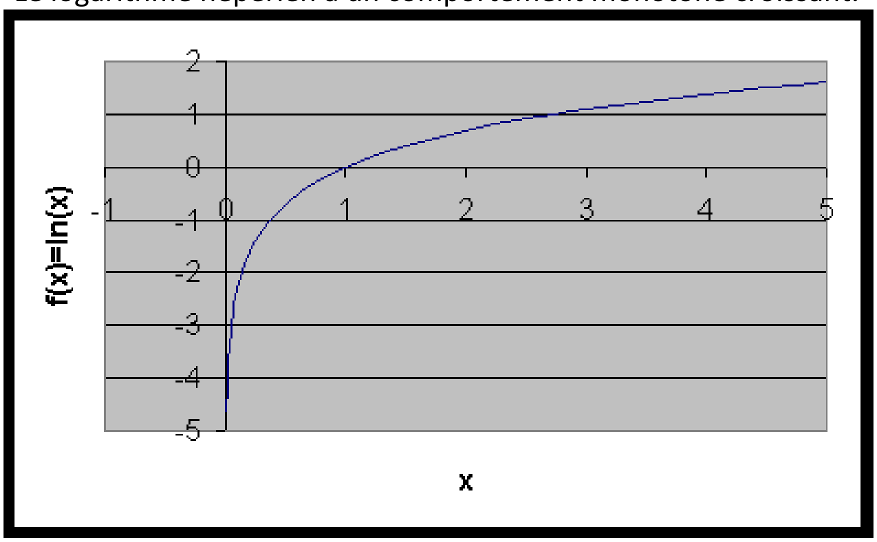
$$Dom(ln\, x) = \{x \mid x > 0\}$$

Image :

$$Im(\ln x) = \mathbb{R}$$

Comportement de la fonction $ln\, x$

Le logarithme népérien a un comportement monotone croissant.



Exemple

À l'aide de la définition du logarithme naturel, trouver la valeur de $\boldsymbol{x}$ telle que l'équation $\boldsymbol{e^x} = 3$ est satisfaite.

$$e^x = 3 \rightarrow \ln(e^x) = \ln(3)$$

$$x = \ln 3$$

L'utilisation que nous venons de faire de la fonction logarithmique s'appliquera tout aussi bien à la résolution d'équation plus complexes.

Exemple

Résoudre l'équation $e^{2x+3} = 10$.

$$\boldsymbol{e^{2x+3}} = 10 \rightarrow \ln(\boldsymbol{e^{2x+3}}) = \ln(10)$$

$\rightarrow 2x + 3 = \ln(10)$

$\rightarrow 2x = \ln(10) - 3$

$\rightarrow x = \frac{ln(10)-3}{2}$

Exemple

Quelle est la valeur de x telle que $ln(8x - 9) = 20$?

Servons-nous du fait que la fonction inverse de $\ln x$ est e^x **:**

$ln(8x - 9) = 20 \rightarrow \mathrm{e}^{\ln\left(e^{8x-9}\right)} = \mathrm{e}^{20}$

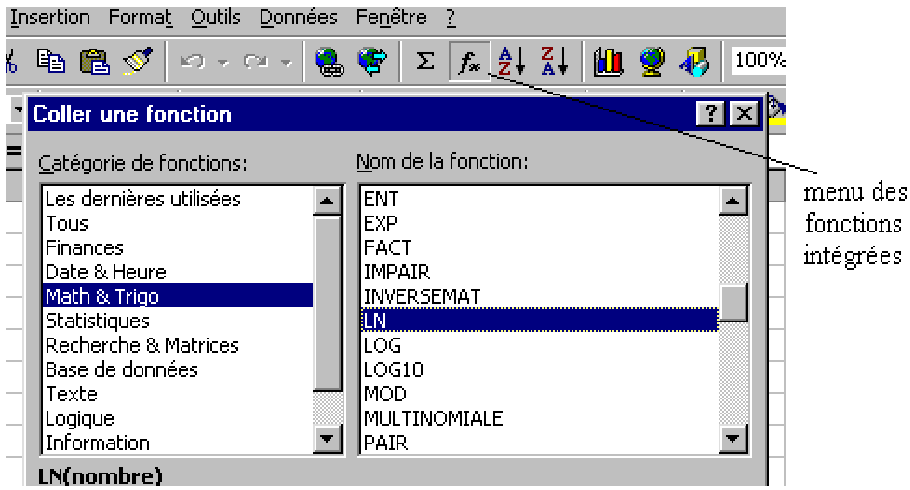
$\rightarrow 8x - 9 = \mathrm{e}^{20}$

$\rightarrow 8x = \mathrm{e}^{20} + 9$

$\rightarrow x = \dfrac{\mathrm{e}^{20} + 9}{8}$

3.1. Utilisation d'Excel dans le calcul de fonctions logarithmiques

Le logiciel Excel est muni de la fonction intégrée $ln(\,)$, permettant ainsi le calcul rapide de la fonction logarithmique en base népérienne. Sur une feuille Excel, sélectionnez l'icône $\boldsymbol{f_x}$ et la catégorie de fonctions **Math & Trigo.**



Une fenêtre de dialogue s'ouvrira et vous demandera quelle valeur vous souhaitez donner à l'exposant.

Exercice

Soit la fonction logarithmique $f\,(x) = ln\,x$. Calculer, à l'aide d'Excel, les valeurs suivantes :

a. $f\,(1)$
b. $f\,(3)$
c. $f\,(e^2)$
d. $f\,(-3)$

3.2. Propriétés des logarithmes

Certaines propriétés des logarithmes peuvent être utiles afin de simplifier certaines expressions algébriques ou encore résoudre des équations :

1) $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$

2) $ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

3) $\ln(a^b) = b.\ln a$

4) $\ln 1 \;= 0$

Exemple

À l'aide des propriétés des logarithmes, trouver la valeur de x telle que

$$4^x = 24$$

L'équation exponentielle que nous devons résoudre a une base autre que e. Toutefois, la propriété 3 permettra de la résoudre en utilisant un cheminement similaire à celui des exemples précédents :

$$4^x = 24 \rightarrow \ln 4^x = \ln(24)$$

$$x.\ln 4 = \ln 24$$

$$x = \frac{\ln 24}{\ln 4} \approx 2.2925$$

LES DROITES ET LES PENTES

Sommaire

Notions requises aux cours : ***Analyse micro-économique, Économie managériale.***

Une ***droite*** est une fonction qui peut être écrite sous la forme $\boldsymbol{y = mx + b}$

Particularité : Graphiquement, une droite est une fonction dont l'inclinaison est constante en tout point.

1. Composantes de l'équation d'une droite

La ***pente***, qui est représentée par la lettre ***m***, mesure l'inclinaison de la droite. Elle correspond à la variation de la valeur de *y* lorsque *x* augmente d'une unité. Graphiquement, elle exprime la variation verticale de la droite pour un déplacement horizontal d'une unité positive.

Si la droite passe par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2), la pente est obtenue par la relation

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

L'ordonnée à l'origine, qui est représentée par la lettre ***b***, est la valeur de ***y*** lorsque ***x*** est zéro. Il s'agit donc de la position de la droite lorsque celle-ci croise l'axe des ***y***.

Exemple

L'équation $\boldsymbol{y = 3x - 4}$ représente une droite dont la pente est 3 ($\boldsymbol{m} = 3$) et dont l'ordonnée à l'origine est -4 ($\boldsymbol{b} = -4$).

Notez bien que les variables $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont tout à fait arbitraires. Elles pourraient tout aussi bien être nommées $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{p}$, comme c'est le cas dans les courbes d'offre et de demande. Il est seulement important de déterminer laquelle des variables constitue la variable indépendante (que l'on place sur l'axe horizontal) et laquelle constitue la variable dépendante (que l'on place sur l'axe verticale).

2. Comment obtenir l'équation d'une droite

En plusieurs occasions, il nous faudra trouver l'équation d'une droite à partir de certaines informations. Par exemple, quelle est l'équation de la droite qui passe les points $(1,4)$ et $(2,8)$? Afin de répondre à cette question, il faut trouver les valeurs de $\boldsymbol{m}$ et de $\boldsymbol{b}$ qui caractérisent la droite.

1. ***Déterminer la pente***

Par définition, la pente est mesurée par la relation

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pente de la droite passant par les points (1,4) et (2,8) serait

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-4}{2-1} = 4$$

ce qui indique que pour déplacement d'une unité vers la droite, il y a un déplacement de 4 unités vers le haut. Notez également que le choix du "premier" et du "deuxième" point n'affectera pas le calcul de la pente :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-8}{1-2} = 4$$

2. ***Trouver l'ordonnée à l'origine***

Afin de trouver la valeur de $\boldsymbol{b}$, il s'agit d'utiliser un point connu de la droite et la pente qui vient d'être déterminée :

Nous venons de trouver que $\boldsymbol{m} = 4$. L'équation de notre droite actuelle est $\boldsymbol{y = mx + b = 4x + b}$. Nous savons de plus que le point $(1{,}4)$ se trouve sur cette droite et doit donc satisfaire son équation :

$$4 = 4(1) + b \;\rightarrow 4 = 4 + b \;\rightarrow b = 0$$

Encore une fois, le choix du point que l'on utilise n'affecte en rien le résultat obtenu. Aurions-nous choisi le point (2,8), le calcul aurait révélé :

$$8 = 4(2) + b \;\rightarrow\; 8 = 8 + b \;\rightarrow\; b = 0$$

La pente et l'ordonnée à l'origine étant maintenant connues, l'équation de la droite est $\boldsymbol{y = 4x + 0}$ ou $\boldsymbol{y = 4x}$.

3. Application à la microéconomie

3.1. Courbe de la demande :

Exemple 1

Faisons l'hypothèse que la courbe de demande est décrite par une droite de forme $\boldsymbol{q = mp + b}$. Trouvez son équation étant données les informations suivantes : un promoteur découvre que la demande en billets de théâtre est de 1200 lorsque le prix est de 60$ mais chute à 900 lorsque le prix est haussé à 75$.

Solution :

La forme de l'équation $\boldsymbol{q = mp + b}$ indique que $\boldsymbol{p}$, le prix, est la variable indépendante (comme $\boldsymbol{x}$), et $\boldsymbol{q}$, la quantité, est la variable dépendante (comme $\boldsymbol{y}$). L'énoncé du problème nous permet de déduire deux points contenus sur la droite de demande : les points (60$, 1200) et (75$, 900). Il s'agit donc à nouveau d'identifier la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite.

Pente :

$$m = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = \frac{900 - 1200}{75 - 60} = \frac{-300}{15} = -20$$

Ainsi l'équation de la droite doit prendre la forme $\boldsymbol{q = -20p + b}$. Il ne reste qu'à trouver l'ordonnée à l'origine à l'aide d'un des deux points.

Ordonnée à l'origine :

Puisque $(60\$, 1200)$ est un point de la droite de demande, il doit faire en sorte que l'équation $q = -20p + b$ soit satisfaite. En substituant, nous obtenons

$$1200 = -20(60) + b$$

$$1200 = -1200 + b$$

$$b = 2400$$

Par conséquent, puisque $m = -20$ et $b = 2400$, l'équation de la droite de demande est

$$q = -20p + 2400$$

Il est intéressant de noter qu'une fois cette droite trouvée, nous pouvons évaluer quelle serait la quantité demandée quel que soit le prix. Par exemple, la quantité demandée lorsque le prix est de 40$ serait obtenue en calculant la variable $\boldsymbol{q}$:

$$q = -20(40) + 2400$$

$$q = -800 + 2400$$

$$q = 1600$$

Nous pourrions également obtenir le prix qu'il faudrait fixer pour que la quantité demandée soit de 1000 billets.

$$1000 = -20\,p + 2400$$

$$20\,p = 2400 - 1000$$

$$20\,p = 1400$$

$$p = 70\,\$$$

Exemple 2

La quantité et le prix d’équilibre d’un bien sont déterminés par l’intersection des courbes de l’offre et de la demande. Pour un produit donné, l’offre est déterminée par la droite

$$q_{offre} = 30p - 45$$

et la demande, pour ce même produit, par la droite

$$q_{demande} = -15p + 855.$$

Déterminer le prix et la quantité d’équilibre et tracer, sur un même graphique, les courbes de l'offre et de la demande.

Solution :

Il faut ici déterminer les coordonnées du point (q , p) qui se situe à l'intersection des deux droites. Ce point doit donc satisfaire à la fois l'équation de l'offre et celle de la demande. La solution du problème consiste à résoudre :

$$\begin{gathered} q = 30p - 45 \\ q = -15p + 855 \end{gathered}$$

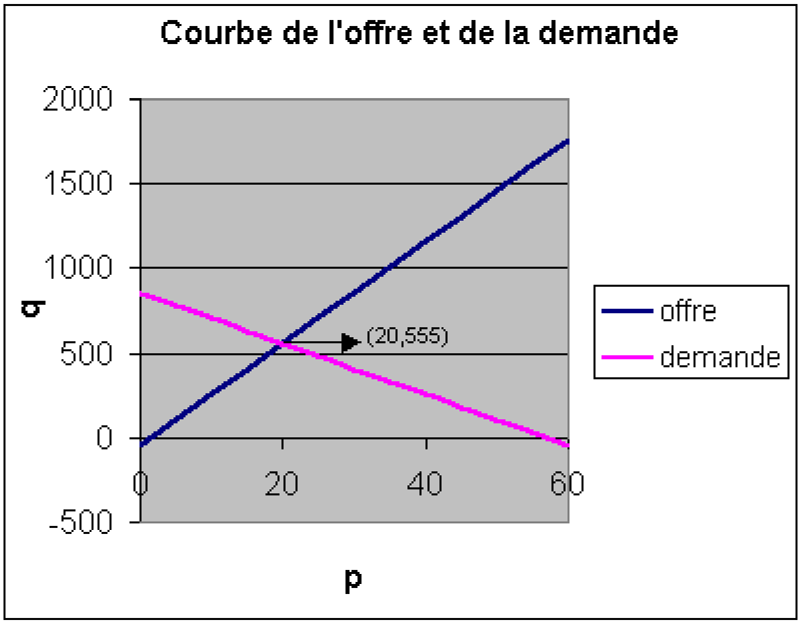
Ainsi,

$$\begin{gathered} 30p - 45 = -15p + 855 \\ 45\,p = 900 \\ p = 20 \end{gathered}$$

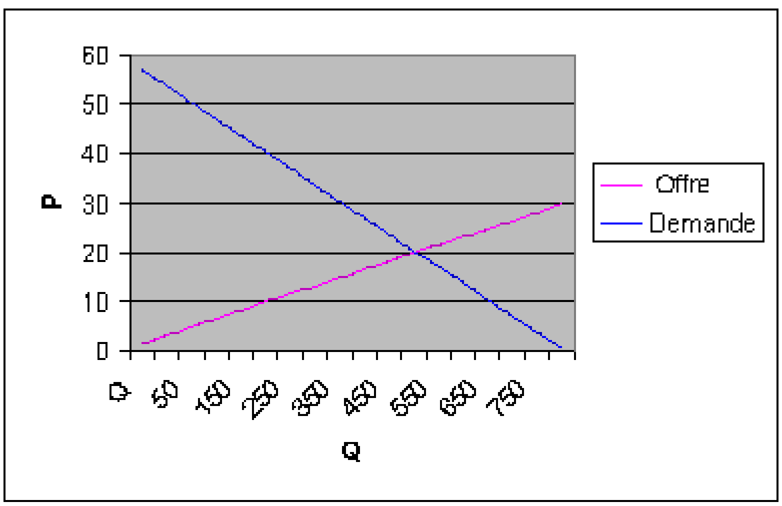
et

$$q = 30(20) - 45 = 555$$

Le prix et la quantitéd'équilibre sont donc 20$ et 555.



En économie, il est d'usage de représenter graphiquement les courbes d'offre et de demande en plaçant le prix (p) en ordonnée et la quantité (q) en abscisse.



3.2. Problèmes d'élasticité

Un problème d'offre ou de demande est parfois posé en présentant comme information initiale le prix et la quantité d'équilibre ainsi que l'élasticité-prix. Cette dernière composante mesure l'effet d'une variation de prix sur l'offre ou la demande. Il s'agit de se rappeler que l'élasticité-prix est définie par la relation

$$\varepsilon_p = \frac{dq}{dp}.\frac{p}{q}$$

où les paramètres représentés sont

p : prix

q : quantité

$\frac{dq}{dq}$: dérivée de l'équation de la quantité en fonction du prix

Dans le cas où le prix et la quantité d'un produit dépendent l'une de l'autre de façon linéaire, nous pouvons utiliser, au lieu de la dérivée, la variation moyenne, c'est-à-dire

$$\varepsilon_p = \frac{dq}{dp}.\frac{p}{q}$$

Si effectivement le prix et la quantité d'un produit dépendent l'une de l'autre de façon linéaire, alors la fonction d'offre ou de demande aura la forme

$$q = mp + b$$

où $\boldsymbol{m}$ est la pente de la droite et est obtenue par

$$m = \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

Notez que sans connaître deux points de la droite, nous pouvons quand même évaluer la pente si le coefficient d'élasticité-prix est donné.

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta q}{\Delta p}.\frac{p}{q} \rightarrow \varepsilon_p.\frac{q}{p} = \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

$$m = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \varepsilon_p . \frac{q}{p}$$

Pour ce qui est de la valeur de l'ordonnée à l'origine, $\boldsymbol{b}$, elle est obtenue en utilisant toute autre information dévoilée dans l'énoncé du problème.

Exemple

Trouver la fonction d'offre si l'élasticité-prix est 0.5 et que le prix et la quantité d'équilibre sont de 500$ et de 200 unités respectivement. Nous faisons l'hypothèse que la quantité dépend du prix de façon linéaire.

Solution :

Il nous faut, pour obtenir l'équation de la droite, trouver la pente. Ceci est possible grâce à la relation que nous avons établie plus haut entre la pente et l'élasticité :

$$m = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \varepsilon_p . \frac{q}{p}$$

$$m = 0{,}5 . \frac{200}{500} = 0{,}5 \times 0{,}4$$

$$m = 0{,}2$$

Il ne nous reste qu'à trouver la valeur de $\boldsymbol{b}$. L'équation de l'offre est $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{mp} + \boldsymbol{b} = \mathbf{0{,}2}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}$. Nous savons de plus que le point (500$, 200) se trouve sur cette droite et doit donc satisfaire son équation :

$$200 = 0{,}2(500) + b \rightarrow 200 = 100 + b \rightarrow b = 100$$

L'équation de la droite d'offre est donc $\boldsymbol{q} = \mathbf{0{,}2}\boldsymbol{p} + \mathbf{100}$.

4. Exercices

Problème 1 :

*Une compagnie produit des chaussures. Lorsque 30 chaussures sont produites, le coût total de production est de 325$. Lorsque 50 chaussures sont produites, le coût s'élève alors à 485$. Quelle est l'équation du coût (**C**) si celui-ci varie de façon linéaire (droite) en fonction du nombre de chaussures produites (**q**) ?*

Solution : $C = 8q + 85$

Problème 2 :

Considérons un marché caractérisé par les courbes d'offre et de demande suivantes :

$$q_{demande} = -10p + 1000$$
$$q_{offre} = 0{,}2p + 298{,}6$$

Trouver le prix et la quantité d'équilibre.
Solution : 68,76$ et 312,35

Problème 3 :

Trouver la fonction de demande si l'élasticité-prix est -0.2 et que le prix et la quantité d'équilibre sont de 100$ et de 2500 unités respectivement, en supposant que la quantité dépend du prix de façon linéaire.

Solution : $\boldsymbol{q = -5p + 3000}$

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION À UNE VARIABLE

Sommaire

Une équation est une forme propositionnelle dans laquelle intervient une égalité entre deux expressions mathématiques qui est, soit vraie, soit fausse.

Exemple

a. $2 = 5 - 3$
b. $2x + 4y = 3x - 22z + 4$
c. $3x^2 + 2x - 4 = 0$

Les trois exemples ci-dessus représentent des équations qui proposent l'égalité entre deux expressions. Cette égalité pourrait ou non être respectée. Dans l'exemple (a), il est facile de constater que l'égalité est vérifiée. Dans les exemples (b) et (c), la valeur que prennent les variables déterminera si, oui ou non, l'égalité est vérifiée. Ces valeurs qui rendent vraie une équation (et surtout les méthodes qui permettent de les trouver) ont une importance capitale en mathématiques. Ils font l'objet de la section suivante…

Solution d'une équation

La solution d'une équation est la valeur - ou les valeurs - que peut prendre une variable et qui réussit à rendre cette équation vraie.

Exemple

Soit l'équation $4x - 8 = 4$

La valeur $x = 3$ est une solution de cette équation. En effet, lorsque x est substitué par la valeur 3, l'équation est satisfaite.

$4(3) - 8 = 4$

$12 - 8 = 4$

$4 = 4$ (vrai!)

Toutefois remplacer x par la valeur 4 ne réussirait pas à rendre vraie cette équation :

$4(4) - 8 = 4$

$16 - 8 = 4$

$8 = 4$ (faux!)

Il est possible pour qu'une équation possède plus d'une solution. Ceci se produit, entre autres, lorsque le degré des polynômes utilisés n'est pas 1.

Exemple

Soit l'équation $x^2 + 6x = 16$.

Les solutions de cette équation sont $x = -8$ et $x = 2$ puisque :

Si $x = -8 \rightarrow (-8)^2 + 6(-8) = 16$

- $64 + (-48) = 16$
- $64 - 48 = 16$
- $16 = 16$ (vrai)

Si $x = 2 \rightarrow (2)^2 + 6(2) = 16$

- $4 + 12 = 16$
- $16 = 16$ (vrai)

Si une équation contient plus d'une variable, alors l'ensemble des valeurs que chacune des variables doivent prendre pour rendre vraie l'équation constituent une solution.

Exemple

Considérons l'équation à deux variables $2x + 3y = 8$

$x = 1, y = 2$ est une solution de l'équation $2x + 3y = 8$.

En effet, lorsque les variables x et y sont substituées par 1 et 2 respectivement, l'équation est satisfaite :

$2(1) + 3(2) = 8$

$2 + 6 = 8$

$8 = 8$ (vrai)

$x = 4, y = 0$ est également une solution de l'équation $2x + 3y = 8$.

En effet, lorsque les variables x et y sont substituées par 0 et 4 respectivement, l'équation est bel et bien satisfaite :

$2(4) + 3(0) = 8$

$8 + 0 = 8$

$8 = 8$ (vrai)

Il serait toutefois faux de dire que $x = 1, y = 1$ est une solution.

$2(1) + 3(1) = 8$

$2 + 3 = 8$

$5 = 8$ (faux)

1- Résolution d'équations linéaires à une variable

Trouver les valeurs qu'une variable puisse prendre pour satisfaire à une équation donnée est un procédé délicat. Les opérations utilisées pour résoudre une équation et le choix de l'ordre dans lequel nous les exécutons demande de l'expérience et de la pratique. La section qui suit vous procurera une méthode permettant de résoudre les équations linéaires (c'est-à-dire dont le degré est 1) comprenant une variable.

Une équation, qui exprime l'égalité entre deux expressions, est comparable à une balance en équilibre. Pour maintenir l'égalité, il faut s'assurer d'effectuer les mêmes opérations de part et d'autre de l'égalité en tout temps. Entre autres, nous pouvons :

- Ajouter ou soustraire la même valeur **des deux côtés de l'égalité ;**
- Multiplier ou diviser **les deux côtés de l'équation** par la même valeur.

1.1. Méthode de résolution

Dans le cas d'équations linéaires à une variable, l'ordre dans lequel nous choisirons d'effectuer les opérations sera sensiblement le même quel que soit le problème donné.

1. Effectuer toutes les distributions ;
2. Regrouper les variables d'un côté de l'égalité et les nombres de l'autre ;
3. Diviser les deux côtés de l'égalité par le coefficient de la variable.

Afin d'alléger la notation, il est utile d'effectuer toutes les simplifications possibles en cours de route.

Exemple

Résoudre l'équation $4(\boldsymbol{x}-5) + 2\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{x} + 7$.

- ***Effectuer toutes les distributions ;***

$4\boldsymbol{x}-20 + 2\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{x} + 7$ (distribution)

$6\boldsymbol{x}-20 = 3\boldsymbol{x} + 7$ (simplification)

- ***Regrouper les variables d'un côté de l'égalité et les nombres de l'autre ;***

Cette opération doit se faire en respectant l'équilibre entre les expressions de gauche et de droite. Afin de regrouper les variables à la gauche, il faut éliminer le terme $3\boldsymbol{x}$ du terme de droite.

$6x - 20 - 3x = 3x + 7 - 3x$ (soustraction de la même valeur des deux côtés de l'égalité)

$3x - 20 = 7$ (simplification)

Afin de regrouper les nombres du côté droit, il faut éliminer le terme -20 se trouvant à la gauche.

$3x - 20 + 20 = 7 + 20$ (addition de la même valeur des deux côtés de l'égalité)

$3x = 27$ (simplification)

- ***Diviser les deux côtés de l'égalité par le coefficient de la variable.***

$\frac{3\boldsymbol{x}}{3} = \frac{27}{3}$ (division des deux côtés de l'équation par la même valeur)

$x = 9$ (simplification)

La solution est donc $x = 9$. Pour valider ce résultat, il importe de substituer la valeur obtenue dans l'équation originale :

$4(x - 5) + 2x = 3x + 7$

$4(9 - 5) + 2(9) = 3(9) + 7$

$4(4) + 18 = 27 + 7$

$16 + 18 = 34$

$34 = 34$ (vrai)

Exemple

Résoudre l'équation $6(2x + 3) + x - 7 = 3(5x + 7) + 2x$.

- ***Effectuer toutes les distributions ;***

$12\boldsymbol{x} + 18 + \boldsymbol{x} - \boldsymbol{7} = 15\boldsymbol{x} + 21 + 2\boldsymbol{x}$ (distribution)

$13\boldsymbol{x} + 11 = 17\boldsymbol{x} + 21$ (simplification)

- ***Regrouper les variables d'un côté de l'égalité et les nombres de l'autre ;***

Cette opération doit se faire en respectant l'équilibre entre les expressions de gauche et de droite. Afin de regrouper les variables à la gauche, il faut éliminer le terme $17\boldsymbol{x}$ du terme de droite.

$13x + 11 - 17x = 17x + 21 - 17x$ (soustraction des deux côtés de l'égalité)

$-4x + 11 = 21$ (simplification)

Afin de regrouper les nombres du côté droit, il faut éliminer le terme + 11 se trouvant à la gauche.

$-4x + 11 - 11 = 21 - 11$ (addition de la même valeur des deux côtés de l'égalité)

$-4x = 10$ (simplification)

- ***Diviser les deux côtés de l'égalité par le coefficient de la variable.***

$\frac{-4\boldsymbol{x}}{-4} = \frac{10}{-4}$ (division des deux côtés de l'équation par la même valeur)

$x = -\frac{5}{2} = -2{,}5$ (simplification)

La solution est donc $x = -2{,}5$. Par vérification, substituons la valeur obtenue dans l'équation originale :

$$6(2x + 3) + x - 7 = 3(5x + 7) + 2x$$

$$6(2(-2{,}5) + 3) + (-2{,}5) - 7 = 3(5(-2{,}5) + 7) + 2(-2{,}5)$$

$$6(-5 + 3) - 2{,}5 - 7 = 3(-12{,}5 + 7) - 5$$

$$6(-2) - 2{,}5 - 7 = 3(-5{,}5) - 5$$

$$-12 - 2{,}5 - 7 = -16{,}5 - 5$$

$-21{,}5 = -21{,}5$ (vrai)

2- Exercices - Solutions et résolution d'équations linéaires

Question 1

Encercler parmi les valeurs suivantes toutes les solutions de l'équation

$x^2 + 3x = 18$?

a. 6
b. 3
c. -3
d. -6

Solution : b et d

Question 2

Encercler toutes les solutions de l'équation $2x - 3y = 4$.

a. $x = 2, y = 0$
b. $x = 0, y = 2$
c. $x = -1, y = -2$
d. $x = 5, y = 2$

Solution : a, c, d

Question 3

Résoudre les équations suivantes :

a. $3(x + 4) - 7 = 14x$
b. $5y - 4 = -2(2y + 2)$
c. $8(2z - 3) - 5z = 3z + 8$
d. $2(x + 3) - 9 = 15x$
e. $3z - 7 = 4(z + 2)$

Solution :

a. $x = \frac{5}{11}$
b. $y = 0$
c. $z = 4$
d. $x = -\frac{3}{13}$
e. $z = -15$

Question 4

En pleine marche de santé, Jeanne se fait voler trente dollars. Au casino, elle triple la somme qui lui reste et retrouve ainsi le double du montant initial qu'elle transportait. Quel était celui-ci ?

Solution :

$3(x - 3) = 2x \rightarrow x = 90$

Question 5

Un conseiller financier suggère de toujours placer trois fois plus d'argent dans actions "nouvelles technologies" que les placements miniers. Combien une personne souhaitant placer un montant global de 2500 $ devrait-elle investir dans chacun de ces secteurs ?

Solution :

625 $ dans les placements miniers, 1875 $ dans les actions nouvelles technologies

Question 6

Un vendeur reçoit un salaire hebdomadaire de base de 920 $ auquel s'ajoute une compensation financière $\boldsymbol{x}$ par km pour ses déplacements en voiture. Au cours d'une semaine, ledit vendeur a parcouru 1200 km et a fait un salaire de 1475 $. Quelle compensation financière reçoit-il par kilomètre ?

Solution :

46,25 ¢ par km

Question 7

En 1999, la compagnie VaVite a réalisé des profits qui surpassaient de 1,2 millions ceux de 1998. Pour ces deux années, les profits totaux de VaVite furent de 15,4 millions. Trouver le profit réalisé en 1998.

Solution :

7,1 millions en 1998

Question 8

Considérant que le taux d'imposition est de 35 % pour tout revenu excédant 8 500 $ (c'est-à-dire, les 8500 premiers dollars sont déductibles), quel est le revenu annuel d'une personne qui paie 5250 $ en impôts ?

Solution :

Soit x : le revenu annuel

$35\ \%\ (x - 8500) = 5250$

$\rightarrow x = 23\,500\$$

LE SYMBOLE DE SOMMATION

Sommaire

1. Somme simple

Le symbole Σ (sigma) s'utilise pour désigner de manière générale la somme de plusieurs termes. Ce symbole est généralement accompagné d'un indice que l'on fait varier de façon à englober tous les termes qui doivent être considérés dans la somme.

Par exemple, la somme des n premiers entiers peut être représentée de la façon suivante:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots . + n$$

De manière plus générale, l'expression

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ représente la somme de n termes $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots . + x_n$.

Exemple 1

Soit $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 6, x_4 = 2 \; et \; x_5 = 7$.

Évaluer $\sum_{i=1}^{5} x_i$ et $\sum_{i=2}^{4} x_i$.

Solution:

Dans la première somme, l'indice " *i* " varie de 1 à 5. On doit donc inclure les 5 termes dans la somme.

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 + 5 + 6 + 2 + 7 = 23$$

Dans le deuxième cas, l'indice " *i* "varie de 2 à 4. Seuls les termes x_2, x_3 et x_4 doivent donc être considérés.

$$\sum_{i=2}^{4} x_i = x_2 + x_3 + x_4 = 5 + 6 + 2 = 13$$

Lorsqu'on utilise le symbole de sommation, il est utile de retenir les règles suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Exemple 2

Soit $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 6, x_4 = 2 \; et \; x_5 = 7$ et $y_1 = 2, y_2 = 8, y_3 = 3,$

$y_4 = 1 \; et \; y_5 = 6.$

Vérifier les trois règles précédentes avec les sommes suivantes :

$a) \sum_{i=1}^{5} 4x_i$

$b) \sum_{i=1}^{5} 4$

$c) \sum_{i=1}^{5} (x_i + y_i)$

Solution :

$$a)\ \sum_{i=1}^{5} 4x_i = 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 4\times 3 + 4\times 5 + 4\times 6 + 4\times 2 + 4\times 7$$
$$= 92$$

et

$$4\sum_{i=1}^{5} x_i = 4\times(3+5+6+2+7) = 4\times 23 = 92$$

b)

$$\sum_{i=1}^{5} 4 = 4+4+4+4+4 = 5\times 4 = 20$$

c)

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i + y_i) = (3+2)+(5+8)+(6+3)+(2+1)+(7+6) = 43$$

Et

$$\sum_{i=1}^{5} x_i + \sum_{i=1}^{5} y_i = (3+5+\cdots 7) + (2+8+\cdots+6) = 23+20 = 43$$

Attention **:**

On ne doit pas confondre l'expression

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

avec

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

pas plus que l'expression

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Avec

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

Exemple 3

Soit $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 6, x_4 = 2 \; et \; x_5 = 7$ et $y_1 = 2, y_2 = 8, y_3 = 3,$

$y_4 = 1 \; et \; y_5 = 6.$

a)

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 3^2 + 5^2 + 6^2 + 2^2 + 7^2 = 123$$

et

$$\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2 = (3 + 5 + 6 + 2 + 7)^2 = 23^2 = 52 \neq 123$$

b)

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5 = (3 \times 2) + (5 \times 8) + \cdots + (7 \times 6)$$
$$= 6 + 40 + \cdots + 42 = 108$$

et

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = (3 + 5 + \cdots + 7) \times (2 + 8 + \cdots + 6) = 23 \times 20 = 460 \neq 108$$

2. Double somme

Dans certaines situations, l'utilisation d'une double somme s'avère nécessaire. Il s'agit alors d'appliquer successivement la définition.

Exemple

Soit $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 1 \; et \; y_1 = 2, y_2 = 4$

Nous utiliserons l'indice *i* pour les termes de x et l'indice *j* pour les termes de y

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j = \sum_{=1}^{3}(x_i y_1 + x_i y_2) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_{2i} y_2 + x_3 y_1 + x_3 y_2$$
$$= (3 \times 2) + (3 \times 4) + (5 \times 2) + (5 \times 4) + (1 \times 2) + (1 \times 4) = 54$$

3. Double indice

Pour représenter de manière générale les données d'un tableau ou d'une matrice, on utilise souvent une notation à double indice, du genre x_{ij} ou le premier indice (*i*) correspond au numéro de la ligne où se situe la donnée et le deuxième (*j*) à celui de la colonne. Par exemple, le terme x_{24} représente la donnée qui si situe à l'intersection de la 2^{ième} ligne et de la 4^{ième} colonne du tableau ou de la matrice.

Exemple

Soit

$$x_{11} = 4 \;\; x_{12} = 4 \;\; x_{13} = 1 \;\; x_{14} = 5$$

$$x_{21} = 0 \;\; x_{22} = 3 \;\; x_{23} = 1 \;\; x_{24} = 2$$

$$x_{31} = 1 \;\; x_{32} = 4 \;\; x_{33} = 2 \;\; x_{34} = 3$$

Pour effectuer la somme des termes d'une ligne, il faut fixer l'indice de cette ligne et faire varier, sur toutes les valeurs possibles, l'indice de la colonne. Par exemple:

$\sum_{j=1}^{4} x_{1j} = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 2 + 4 + 1 + 5 = 12$ (somme de la première ligne)

$\sum_{j=1}^{4} x_{2j} = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 0 + 3 + 1 + 2 = 6$ (somme de la 2^{ième} ligne)

Pour effectuer la somme des termes d'une colonne, il faut fixer l'indice de cette colonne et faire varier, sur toutes les valeurs possibles, l'indice de la ligne.

Par exemple:

$\sum_{i=1}^{3} x_{i4} = x_{14} + \ x_{24} + x_{34} = 5 + 2 + 3 = 10$ (somme de la 4ième colonne)

Pour effectuer la somme de tous les termes du tableau, il faut faire varier les deux indices et utiliser une double somme :

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = \sum_{i=1}^{3}(x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4})$$
$$= x_{11} + \ x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{21} + \ x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{31} + \ x_{32} + x_{33} + x_{34} = 2 + 4 + 1 + 6 + 0 + 3 + \cdots + 3 = 28$$

CONVERSION DE TAUX

Sommaire

1. Vocabulaire

- Dates d'intérêt : dates où les intérêts sont versés;
- Période d'intérêt : intervalle de temps entre deux dates d'intérêt;
- Taux périodique : taux d'intérêt réel par période d'intérêt;
- Capitalisation : le fait d'ajouter les intérêts au capital;
- Taux nominal : Ce taux, calculé sur une base annuelle, ne sert qu'à déterminer le taux périodique. C'est généralement ce taux qui est affiché. Il devrait toujours être accompagné d'une précision sur le type de capitalisation. Par exemple, un taux de "8 % capitalisé semestriellement" signifie que la période d'intérêt est le semestre et que le taux périodique (semestriel) est $\frac{8\,\%}{2} = 4\,\%$. Le taux nominal ne correspond pas au taux annuel réel, sauf si la capitalisation est annuelle;
- Taux effectif : taux d'intérêt annuel réel.

2. Équivalence de taux

Imaginez la situation suivante : une banque A vous offre un taux annuel effectif de 6 %; une banque B vous offre un taux périodique de 1,5 % par trimestre. Comment feriez-vous pour déterminer quelle banque offre le meilleur rendement? Pour comparer deux taux d'intérêt, il faut pouvoir les évaluer sur une même période. Par exemple, nous pouvons trouver le taux annuel qui est équivalent à un taux trimestriel de 1,5 % et vérifier s'il est plus élevé que 6 %. Cette **conversion** doit se faire en respectant la valeur qui serait accumulée à un taux donné.

Définition

Deux taux sont dits **équivalents** si, pour un placement initial identique sur un même intervalle de temps (une année complète, par exemple), les valeurs acquises par le placement initial calculées aux deux taux sont égales.

Considérons le cas où nous versons un montant V0 dans un banque offrant un taux trimestriel i_{trim}. Au bout d'une année complète, c'est-à-dire 4 trimestres, la valeur acquise sera :

$$V_0(1+i_{trim})^4$$

Supposons maintenant qu'une autre banque offre un taux annuel i_{ann}. Au bout d'une année complète, la valeur acquise du même $\mathrm{V_0}(1+\mathrm{i_{trim}})^4$ montant sera $V_0(1+i_{ann})^1$.

Selon la définition, les taux i_{ann} et i_{trim} sont équivalents si

$$V_0(1+i_{trim})^4 = V_0(1+i_{ann})^1$$

$$\Leftrightarrow (1+i_{trim})^4 = (1+i_{ann})^1$$

Remarquez que la valeur initiale du placement n'importe pas du tout. Cette relation permet de passer d'un taux trimestriel à un taux annuel équivalent, ou l'inverse.

Exemple 1

La banque A vous offre un taux annuel (effectif) de 6 %; la banque B vous offre un taux de 1,5 % par trimestre. Laquelle des deux banques offre le meilleur rendement.

Solution

La banque B offre un taux trimestriel de 1,5 %. Le taux annuel équivalent (ou taux effectif) à ce taux peut être obtenu par la relation

$$\begin{gathered}(1+\mathrm{i_{trim}})^4 = 1+\mathrm{i_{ann}}\\ (1{,}015)^4 = 1+\mathrm{i_{ann}}\\ \mathrm{i_{ann}} = (1{,}015)^4 - 1 = 0{,}06136355\end{gathered}$$

La banque B, avec son taux annuel (effectif) de 6,136355 % offre donc un meilleur rendement que la banque A.

Solution alternative

La banque A offre un taux effectif de 6 %. Le taux trimestriel équivalent est aussi obtenu de la relation :

$$\begin{gathered}(1+\mathrm{i_{trim}})^4 = 1+\mathrm{i_{ann}}\\ (1+\mathrm{i_{trim}})^4 = 1+0{,}06 = 1{,}06\\ ((1+\mathrm{i_{trim}})^4)^{1/4} = (1{,}06)^{1/4}\\ 1+\mathrm{i_{trim}} = (1{,}06)^{1/4}\\ \mathrm{i_{trim}} = (1{,}06)^{1/4} - 1 = 0{,}014673846 \text{ i. e } 1{,}4673846\ \%\end{gathered}$$

Ce taux étant inférieur au taux trimestriel offert par la banque B, on arrive à la même conclusion.

Le raisonnement que nous venons d'effectuer s'applique à toutes les conversions de taux. Un taux périodique peut toujours être converti pourvu que la relation d'équivalence des taux soit respectée :

Relation d'équivalence des taux

$$(1 + i_{ann})^1 = (1 + i_{sem})^2 = (1 + i_{trim})^4 = (1 + i_{mens})^{12}$$

On doit s'assurer que cette relation est satisfaite pour que la valeur accumulée d'un placement de 1 $, capital et intérêts, à la fin d'une année complète soit la même quel que soit le mode de capitalisation.

Exemple 2

Quel est le taux mensuel équivalent à un taux trimestriel de 2,5 %?

Solution

Nous cherchons à trouver i_{mens} sachant que $i_{trim} = 2{,}5$ %. Selon la relation d'équivalence des taux, l'égalité

$$(1 + i_{trim})^4 = (1 + i_{mens})^{12}$$

doit être satisfaite. Il reste à isoler i_{mens} :

$$\begin{aligned}
(1 + i_{mens})^{12} &= (1 + i_{trim})^4 \\
(1 + i_{mens})^{12} &= (1 + 2{,}5\%)^4 \\
\left((1 + i_{mens})^{12}\right)^{1/12} &= \left((1{,}025)^4\right)^{1/12} \\
(1 + i_{mens})^{12/12} &= (1{,}025)^{4/12} \\
1 + i_{mens} &= (1{,}025)^{1/3} \\
i_{mens} &= (1{,}025)^{1/3} - 1 \\
i_{mens} &= 0{,}8265\%
\end{aligned}$$

Exemple 3

Quel est le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 8 %, capitalisation semestrielle ?

Solution
D'abord, il faut interpréter le taux de 8 % comme étant nominal puisqu'il est accompagné d'une précision sur le type de capitalisation. Un taux de 8 %, capitalisation semestrielle, représente en réalité un taux de 4 % semestriel ($\frac{8\ \%}{2} = 4\ \%$, semestres/année), si on laisse les intérêts se capitaliser. Nous cherchons donc à trouver i_{mens}sachant que $i_{sem} = 4\ \%$. Selon la relation de l'équivalence des taux, l'identité

$$(1 + i_{mens})^{12} = (1 + i_{sem})^2$$

doit être satisfaite. Il reste à isoler i_{mens}:

$$(1 + i_{mens})^{12} = (1 + 4\%)^2$$
$$((1 + i_{mens})^{12})^{1/12} = ((1{,}04)^2)^{1/12}$$
$$(1 + i_{mens})^{12/12} = (1{,}04)^{2/12}$$
$$1 + i_{mens} = (1{,}04)^{1/6}$$
$$i_{mens} = (1{,}04)^{1/6} - 1$$
$$i_{mens} = 0{,}6558\%$$

3. Exercice

Soit un taux annuel de 15 %. Trouver les taux périodiques i_{sem}, $i_{mens,}$$i_{trim}$ qui lui sont équivalents.

(rép : 7,23805 %; 3,55581 %; 1,17149 %)