

# Rappel mathématique

## Germain Belzile

Note : à chaque fois qu'il est question de taux dans ce texte, il sera exprimé en décimales et non pas en pourcentage. Par exemple, 2 % sera exprimé comme 0,02.

### 1) Les logarithmes

#### 1.1 Qu'est-ce qu'un logarithme ?

Soit la formule  $a^u = x$ .

Le logarithme de  $x$  en base  $a$  est  $u$  (on écrit alors  $\log_a x = u$ ).

Un exemple :  $2^5 = 32$ ,

Alors  $\log_2 32 = 5$ . Le log de 32 en base 2 est 5, car il faut mettre 2 à la puissance 5 pour obtenir 32.

La base la plus couramment utilisée est  $e$  (exponentiel), un nombre irrationnel, égal à 2,718281828459 .... Vous trouverez cette constante sur le clavier de la plupart des calculatrices dignes de ce nom. Parmi les raisons pour lesquelles  $e$  est si important, on peut noter que la dérivée première de  $e^x$  est égale à  $e^x$ .

Le logarithme en base  $e$  est écrit  $\ln$  et se dit « logarithme naturel ».

Si  $e^u = a$ , alors  $u = \log_e a = \ln a$ .

Donc,

$$e^u = e^{\ln a} = a.$$

Ce résultat est très intéressant.  $\ln a$  est la puissance à laquelle il faut mettre  $e$  pour obtenir  $a$ .

#### 1.2 Règles des logarithmes naturels

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad (a \text{ et } b \text{ étant positifs})$$

$$\ln(a/b) = \ln a - \ln b \quad (a \text{ et } b \text{ étant positifs})$$

$$\ln b^a = a \ln b \quad (b \text{ étant positif})$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^a = a \quad (a \text{ étant positif})$$

$$e^{\ln a} = a \quad (\text{a étant positif})$$

En outre (mais ceci dépasse le cadre du cours),

$$f' \ln a = \ln a$$

### 1.3 Quand utiliser les logarithmes ?

La troisième règle est particulièrement utile. Ainsi,  $\ln b^a = a \ln b$ . Si l'on cherche la valeur d'un exposant inconnu, on utilise les logs naturels. Par exemple,  $Q_n = Q_0 (1 + g)^n$ . Si l'on cherche à isoler la valeur de  $n$ , on utilise les logs. Voir # 2.3, plus bas.

## 2) Les taux de croissance moyens

**2.1** Supposons qu'une variable  $Q$ , d'une valeur égale à  $Q_0$  au départ, croisse à un taux  $g$  (en décimales) pendant  $n$  périodes. Quelle sera alors la valeur de cette variable (que nous allons appeler  $Q_n$ ) ?

Une formule simple, familière aux étudiants en finance, nous permet de le calculer facilement :

$$Q_n = Q_0 (1 + g)^n$$

Cette formule est très importante. Les trois formules qui suivent en découlent.

#### Exemples de calculs :

- Le PIB nominal annuel était de 1 077 744 M\$ au troisième trimestre de 2001. Ce PIB croît à un taux moyen de 4 % par année. Quelle sera sa valeur dans 30 ans ?
  - Réponse :  $1\,077\,744 * (1 + 0,04)^{30} = 3\,495\,552$  M\$
- L'IPC était égal à 100 en 1992. Le taux d'inflation est en moyenne de 1,8 % par année. Qu'arrivera-t-il au niveau moyen des prix (si le taux d'inflation reste stable à 1,8 %) en 20 ans ?
  - Réponse :  $100 * (1 + 0,018)^{20} = 142,9$ . Le niveau des prix augmentera donc de 42,9 %.

Dans ce premier cas, l'inconnue était  $Q_n$ . Si l'inconnue est plutôt une autre des variables de l'équation de taux de croissance, il suffit de l'isoler.

**2.2** Si l'on cherche  $Q_0$ , la formule est

$$Q_0 = Q_n / (1 + g)^n$$

#### Exemple de calcul :

- Le PIB était, en 1999, égal à 975 263 M\$. Il a crû à un rythme de 3,5 % par année depuis 30 ans. Quelle était sa valeur trente ans plus tôt ?
  - Réponse :  $(975\,263) / (1 + 0,035)^{30} = 347\,465$  M\$

**2.3** Si l'on cherche n (le nombre de périodes entre  $Q_0$  et  $Q_n$ , la formule est :

$$n = \ln(Q_n/Q_0) / \ln(1+g)$$

Voici comment n a été isolé. Il faut faire appel aux règles de logarithmes.

$$Q_n = Q_0 (1 + g)^n$$

$$Q_n / Q_0 = (1 + g)^n$$

$$\ln(Q_n / Q_0) = \ln(1 + g)^n$$

$$\ln(Q_n / Q_0) = n \ln(1 + g)$$

$$(\ln(Q_n / Q_0)) / \ln(1 + g) = (n \ln(1 + g)) / (\ln(1 + g))$$

$$(\ln(Q_n / Q_0)) / \ln(1 + g) = n$$

Exemples de calculs :

- Le PIB était de 347 465 M\$ en 1969. En quelle année sera-t-il égal à 975 263 M\$, s'il croît à un rythme de 3,5 % par année ?
  - Réponse :  $(\ln(975\,263 / 347\,465)) / (\ln(1 + 0,035)) = 30$ . Il faut donc ajouter 30 ans à 1969, ce qui donne 1999.
- En combien d'années le PIB doublera-t-il si son taux de croissance moyen est de 4 % par année ?
  - Réponse : étant donné que le PIB double,  $(Q_n / Q_0) = 2$ . On peut donc faire le calcul suivant :  $(\ln 2) / (\ln 1,04) = 17,67$  années.

Une formule approximative peut aussi être utilisée. Cette dernière permet d'effectuer des calculs rapides et assez précis. Étant donné que  $\ln(2) = 0,693147$  soit presque 0,70 et que  $\ln(1 + 0,04) = 0,039221$  soit presque 0,04, on peut faire le calcul suivant :  $0,70 / 0,04$  (ou encore  $70 / 4) = 17,5$ , ce qui est un résultat très proche de 17,67. Cette formule approximative définit ce que l'on appelle la « règle du 70 ». Pour connaître le temps requis pour doubler une variable, il suffit de diviser 70 par le taux de croissance par période (en %).

**2.4** Si l'on cherche g (le taux de croissance moyen sur la période n), la formule est :

$$g = (Q_n / Q_0)^{1/n} - 1$$

Cette formule est une version générale de la formule que vous connaissez déjà pour calculer un taux de croissance. En effet, pour mesurer le taux de croissance d'une période à une autre, la formule est :

$$g = (Q_1 / Q_0)^{1/1} - 1 \quad \text{car } n = 1$$

Cette formule peut être réécrite comme

$$((Q_n / Q_0) - (Q_0 / Q_0)) \text{ ou } ((Q_n - Q_0) / Q_0) .$$

Cette dernière formule ne tient donc que si on mesure le taux de croissance d'une année à l'année suivante. Dès que plusieurs périodes séparent  $Q_0$  de  $Q_n$ , on doit utiliser la formule générale.

#### Exemples de calculs :

- Calculez le taux de croissance annuel du PIB réel, entre le troisième trimestre de 2000 et le même trimestre de 2001, si le PIB réel était de 1 077 744 M\$ au troisième de 2001 et de 1 067 956 M\$ un an plus tôt.
  - Réponse :  $(1\,077\,744 / 1\,067\,956) - 1 = 0,009$  ou 0,9 %
- Calculez le taux d'inflation annuel moyen entre 1992 et 2000, si 1992 est l'année de base et l'IPC était égal à 117 en 2000.
  - Réponse :  $(117 / 100)^{1/8} - 1 = 0,0198$  ou 2 %

2.5 Une extension : la convergence d'une variable dans deux régions.

### 3) Les approximations

Durant le cours « Analyse macroéconomique », nous utiliserons un certain nombre d'approximations qui faciliteront les calculs. Ces approximations tiennent dans la mesure où les variables utilisées ( $x$ ,  $y$  et  $z$  dans nos exemples) sont petites (# 3.1 à 3.3) ou varient peu (# 3.4 et 3.5). Pour les calculs présentés en 3.1 à 3.3,  $x = 0,05$  et  $y = 0,03$ . Pour ceux en 3.4 et 3.5, nous supposons plutôt que le taux de variation de  $x = 0,05$  et celui de  $y = 0,03$ .

$$3.1 \quad (1 + x) * (1 + y) \approx 1 + x + y$$

Preuve :  $(1 + x) * (1 + y) = 1 + x + y + xy$  . Si  $x$  et  $y$  sont petits,  $xy$  est très petit et peut être ignoré.

$$3.2 \quad (1 + x)^2 \approx 1 + 2x$$

Preuve :  $(1 + x)^2 = (1 + x) * (1 + x) = 1 + 2x + x^2$  . Si  $x$  est petit,  $x^2$  est très petit et peut être ignoré.

- Exemple numérique : Vous faites deux placements consécutifs de 1 an à la banque, à un taux d'intérêt annuel de 0,05. Ceci serait équivalent à faire un placement de deux ans à quel taux annuel composé ?
  - Réponse :  $(1 + 0,05)^2 = 1,1025$  , donc 10,25 %.  
L'approximation nous donnerait  $(1 + 2(0,05))$ , soit 1,10 (donc 10 %).

### 3.3 $(1 + x) / (1 + y) \approx 1 + x - y$

Preuve : Soit  $(1 + x - y) * (1 + y) = 1 + x + xy - y^2$ . Si  $x$  et  $y$  sont petits,  $xy$  et  $y^2$  sont très petits et peuvent être ignorés (surtout que l'on soustrait un par l'autre). Dans ce cas,  $(1 + x - y) * (1 + y) \approx 1 + x$ . Si l'on divise les deux côtés de cette égalité par  $(1 + y)$ , on obtient :

$$1 + x - y \approx (1 + x) / (1 + y) .$$

- Exemple numérique : Le taux d'intérêt réel  $r$  est défini comme :  
 $1 + r = (1 + i) / (1 + \Pi^a)$ , où  $\Pi^a$  est le taux d'inflation anticipé et  $i$  est le taux d'intérêt nominal. Quel est le taux d'intérêt réel si  $i = 0,05$  et  $\Pi^a = 0,03$  ?
  - Réponse :  $1 + r = (1 + 0,05) / (1 + 0,03) = 1,05 / 1,03 = 1,0194$ . Alors,  $r = 0,0194$  ou 1,94 %.  
En utilisant l'approximation, on obtient  $1 + r = 1 + i - \Pi^a = 1 + 0,05 - 0,03 = 1,02$ .  
 $r$  est donc égal à 0,02 ou 2 %.

### 3.4 Si $z = xy$ , alors $\Delta\% z \approx \Delta\% x + \Delta\% y$

Preuve : Soit  $\Delta z$  l'augmentation de  $z$  causée par une augmentation de  $x$  égale à  $\Delta x$  et par une augmentation de  $y$  égale à  $\Delta y$ . Alors,

$z + \Delta z = (x + \Delta x) * (y + \Delta y)$ . Si l'on divise les deux côtés par  $z$  (en utilisant le fait que  $z = xy$ ), on obtient :

$(z + \Delta z) / z = (x + \Delta x) / x * (y + \Delta y) / y$ . En simplifiant, on a :

$1 + (\Delta z / z) = (1 + (\Delta x / x)) * (1 + (\Delta y / y))$ . Ceci est équivalent à

$1 + \Delta\% z = (1 + \Delta\% x) * (1 + \Delta\% y)$ . Du numéro 3.1, on peut conclure que

$1 + \Delta\% z \approx (1 + \Delta\% x + \Delta\% y)$  ou encore :

$$\Delta\% z \approx \Delta\% x + \Delta\% y$$

- Exemple numérique : Soit le PIB réel ( $Y$ ), égal à 1000, la productivité moyenne du travail ( $y$ ) égale à 10 et l'emploi ( $L$ ) égal à 100.  $Y = y * L$   
Si l'emploi croît de 0,05 et que la productivité croît de 0,03, de combien croît le PIB réel ?
  - Réponse :  $Y = (10 * 1,03) * (100 * 1,05) = 1081,5$ . Le PIB réel a donc crû de :  
 $(1081,5 / 1000) - 1 = 0,0815$  ou 8,15 %  
En utilisant la formule approximative, on obtient :  
 $\Delta\% Y \approx \Delta\% y + \Delta\% L = 0,03 + 0,05 = 0,08$  ou 8 %.

### 3.5 Si $z = x / y$ , alors $\Delta\% z \approx \Delta\% x - \Delta\% y$

Preuve : Soit  $\Delta z$  l'augmentation de  $z$  causée par une augmentation de  $x$  égale à  $\Delta x$  et par une diminution de  $y$  égale à  $\Delta y$ . Alors,

$z + \Delta z = (x + \Delta x) / (y + \Delta y)$ . Si l'on divise les deux côtés par  $z$  (en utilisant le fait que  $z = x/y$ ), on obtient :

$1 + (\Delta z / z) = (1 + (\Delta x / x)) / (1 + (\Delta y / y))$ . Ceci est équivalent à :

$1 + \Delta\% z = (1 + \Delta\% x) / (1 + \Delta\% y)$ . Du numéro 3.3, on peut conclure que

$1 + \Delta\% z \approx (1 + \Delta\% x - \Delta\% y)$  ou encore :

$$\Delta\% z \approx \Delta\% x - \Delta\% y$$

- Exemple numérique : Soit le PIB réel (Y), égal à 1000, la population totale (N) égale à 10 et le PIB par habitant (Yn) égal à 100.  $Y_n = Y / N$   
Si le PIB réel croît de 0,05 et que la population croît de 0,03, de combien croît le PIB réel par habitant ?
  - Réponse :  $Y_n = (1000 * 1,05) / (10 * 1,03) = 1050 / 10,3 = 101,942$ . Le PIB réel per capita a donc crû de :  
 $(101,942 / 100) - 1 = 0,0194$  ou 1,94 %  
En utilisant la formule approximative, on obtient :  
 $\Delta\% Y_n \approx \Delta\% Y - \Delta\% N = 0,05 - 0,03 = 0,02$  ou 2 %.

#### 4) Flux et stocks

Toutes les variables économiques peuvent être classées dans deux grandes catégories : les variables de flux et les variables de stock. Une variable de flux est une variable qui a une dimension dans le temps. On la reconnaît facilement : elle doit absolument être suivie d'une durée pour être compréhensible. Une variable de stock, quant à elle, est une variable instantanée. Elle n'a pas de dimension temporelle.

Exemples :

- |  |       |
|--|-------|
| • Revenu                                   | flux  |
| • Taux de chômage                          | stock |
| • Vitesse sur l'autoroute                  | flux  |
| • Distance entre Québec et Montréal        | stock |
| • Niveau d'eau dans une baignoire          | stock |
| • Vitesse à laquelle une baignoire se vide | flux  |
| • Valeur de vos actifs                     | stock |

#### 5) Les fonctions

Une fonction, telle que  $y = f(x)$ , exprime une relation entre deux variables (x, y) telle que pour chaque valeur de x il n'existe qu'une seule valeur de y. Nous ne nous intéresserons pas à des formes fonctionnelles spécifiques. Il est cependant intéressant comprendre le sens de la relation entre les deux variables.

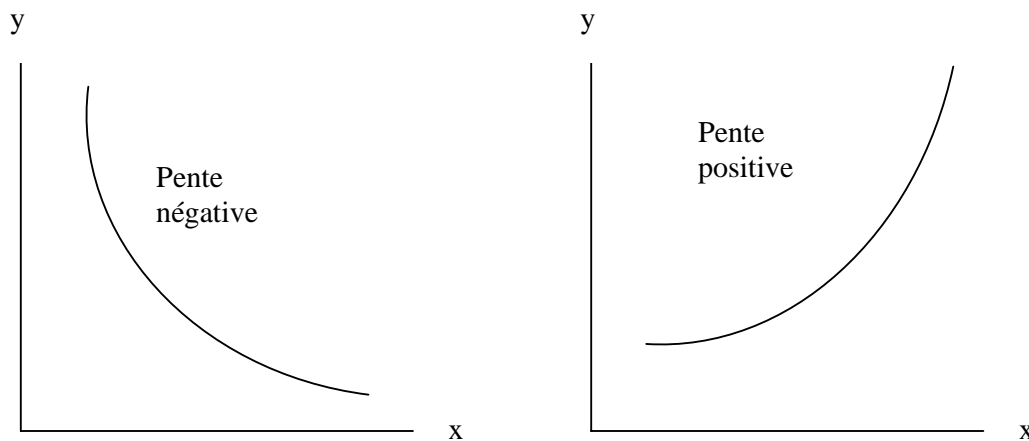
- Une relation positive, notée  $y = f(x)$  veut dire que les deux variables y et x varient dans le même sens. (+)
  - Lorsque x augmente, y augmente aussi. Lorsque x diminue, y diminue aussi.
- Une relation négative, notée  $y = f(x)$  veut dire que les deux variables y et x varient dans le sens opposé. (-)
  - Lorsque x augmente, y diminue. Lorsque x diminue, y augmente.

#### 6) Graphiques et pentes

Une fonction contenant une variable indépendante,  $y = f(x)$ , peut être représentée dans un graphique à deux dimensions. On place normalement la variable dépendante (y) sur l'axe vertical et la variable indépendante (x) sur l'axe horizontal.

La pente d'une droite mesure le rapport entre la variation de la variable dépendante et la variation de la variable indépendante.

Voici deux graphiques avec des fonctions négative et positive.



## 7) Quelques notions d'offre et de demande

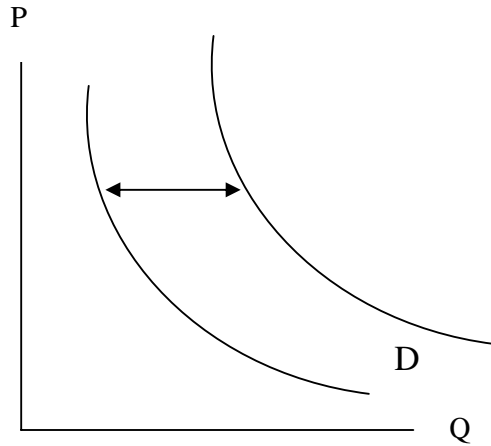
Voici maintenant quelques notions d'offre et de demande. Ces notions ne sont pas strictement nécessaires pour réussir le cours d'environnement macroéconomique. Cependant, nous utiliserons souvent des graphiques comprenant une offre et une demande (fonds prêtables, monnaie, dollars, etc..). Il serait donc bon, pour ceux n'ayant jamais fait d'économie, d'avoir des notions permettant de comprendre ce type de graphique, très utilisé en économie.

Soit la quantité demandée d'un bien ( $Q_d$ ).

$$Q_d = f(P, A, Z, R)$$

- P est le prix du bien (crème glacée)
- A est le prix des substituts
- Z est le prix des compléments
- R est le revenu des consommateurs

$Q_d$  indique les quantités que les consommateurs sont prêts à acheter en fonction du niveau des variables de droite. Lorsque l'on présente cette relation dans un graphique, il est impossible de présenter simultanément toutes les variables. La solution que l'on retient est tout simplement de présenter la relation entre  $Q_d$  et une des variables de droite, les autres variables étant fixes à un certain niveau (on dit alors *ceteris paribus*). Ici, on a choisi la variable P et la relation entre  $Q_d$  et P est négative. Si une autre variable que P change (soit A, Z ou R), c'est alors la courbe D au complet qui se déplace.

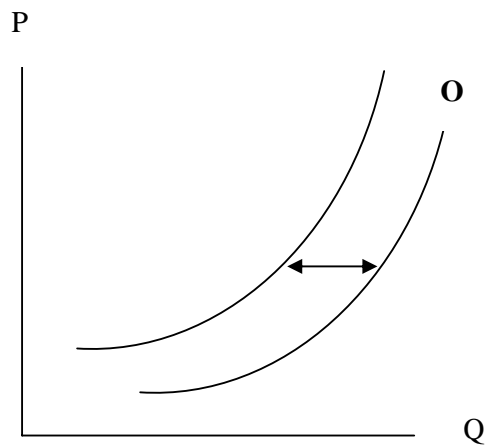


Soit  $Q_0$ , la quantité offerte d'un bien.

$$Q = f(P, W, T)$$

- P est le prix du bien
- W est le prix des facteurs
- T est la technologie

$Q_0$  indique les quantités que les producteurs sont prêts à produire en fonction du niveau des variables de droite. Lorsque l'on présente cette relation dans un graphique, il est impossible de présenter simultanément toutes les variables. La solution que l'on retient est tout simplement de présenter la relation entre  $Q_0$  et une des variables de droite, les autres variables étant fixes à un certain niveau (on dit alors *ceteris paribus*). Ici, on a choisi la variable P et la relation entre  $Q_0$  et P est positive. *Ceteris paribus*, une variation de P entraîne un déplacement le long de la courbe d'offre. Tout changement d'une variable autre que le prix du produit (soit W ou T) provoque un déplacement de la courbe d'offre.



L'interaction de l'offre et de la demande détermine un équilibre de marché.  
Au prix d'équilibre, les quantités demandées égalent les quantités offertes.

