Thème 13 : le monopole

3) Un monopole est caractérisé par les courbes de demande et de coûts suivantes:

$$Qd = -2P + 90$$
$$CT = 2 + 57Q - 8Q^2 + Q^3$$

3.1) Identifiez les équations de CFT, CFM, CVT, CVM, CTM et Cm.

$$CT = 2 + 57Q - 8Q^2 + Q^3$$
$$CFT = 2$$
$$CFM = \frac{2}{Q}$$
$$CVT = 57Q - 8Q^2 + Q^3$$
$$CVM = \frac{57Q - 8Q^2 + Q^3}{Q}$$
$$CTM = \frac{2 + 57Q - 8Q^2 + Q^3}{Q} = \frac{2}{Q} + 57 - 8Q + Q^2$$
$$Cm = \frac{dCT}{dQ} = \frac{d(CFT + CVT)}{dQ} = 57 - 16Q + 3Q^2$$

3.2) Quelle quantité maximiserait ses recettes totales? Quel serait ce maximum?

Ici ce n'est pas la solution du monopole mais simplement une question sur la recette totale

On a la demande suivante $Qd = -2P + 90 \quad \Rightarrow \quad P = 45 - 0.5Q$

On cherche la recette totale en substituant les prix par l'équation de demande

$$RT = P \cdot Q = (45 - 0.5Q) \cdot Q = 45Q - 0.5\ Q^2$$
$$Rm = \frac{dRT}{dQ} = \frac{d(45Q - 0.5\ Q^2)}{dQ} = 45 - 0,5 \cdot 2 \cdot Q = 45 - Q$$

On maximise la RT lorsque la Rm=0

$$Rm = 45 - Q = 0$$
$$\Rightarrow Q = 45$$

Substituons Q=45 dans l'équation de la recette totale

$$RT = 45Q - 0.5\ Q^2 = 45(45) - 0.5\ (45)^2 = 1\ 012.50\$$$

3.3) Quel est le niveau de production qui maximiserait ses profits totaux? Expliquez pourquoi votre résultat diffère de celui obtenu à la question 3.2.

Ici on cherche la situation du monopole non-discriminant où Rm=Cm et donc où les profits marginaux sont $\Pi_t m = 0$

On peut procéder de deux manières

$$\max_Q \Pi_t \quad \Leftrightarrow \quad \max_Q RT - CT$$

$$\Rightarrow \frac{d\Pi_t}{dQ} = \Pi_t m = 0 \qquad \Rightarrow \frac{d(RT-CT)}{dQ} = Rm - Cm = 0 \quad \Rightarrow Rm = Cm$$

$$\Pi_t = RT - CT = (45Q - 0.5\ Q^2) - (2 + 57Q - 8Q^2 + Q^3)$$
$$= -2 - 12Q + 7.5Q^2 - Q^3$$
$$\max_Q \Pi_t \Rightarrow \max_Q \ -2 - 12Q + 7.5Q^2 - Q^3$$
$$\Rightarrow \frac{d\Pi_t}{dQ} = -12 + 15Q - 3Q^2 = 0$$
$$-3Q^2 + 15Q - 12 = 0 \quad est\ de\ la\ forme\ ax^2 + bx + c = 0$$
avec

$a = -3$

$b = 15$

$c = -12$

on trouve les racines avec

$$Q^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4(-3)(-12)}}{2(-3)}$$

$$Q^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-15 + \sqrt{15^2 - 4(-3)(-12)}}{2(-3)} = 1$$
$$\text{et} \quad Q^* = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-15 - \sqrt{15^2 - 4(-3)(-12)}}{2(-3)} = 4$$

Code Matlab

```
a=-3
b=15
c=-12


Q1=(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a)

Q2=(-b-sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a)
```

La dérivée seconde confirme que 4 est un maximum (on a une fonction concave qui donne un maximum lorsque la deuxième dérivée est négative)

$$\frac{d^2\Pi_t}{dQ^2} = \frac{d\Pi m}{dQ} = -6Q + 15$$
$$\frac{d^2\Pi_t}{dQ^2} = \frac{d\Pi m}{dQ} = -6(1) + 15 > 0$$
$$\frac{d^2\Pi_t}{dQ^2} = \frac{d\Pi m}{dQ} = -6(4) + 15 < 0$$

Raison : Q=4 est inférieur à Q=45 car si les RT augmentent, les CT augmentent plus vite encore (rendements décroissants)

On pourrait aussi comparer les valeurs des fonctions de profits totaux

$$\Pi_t = (45Q - 0.5\ Q^2) - (2 + 57Q - 8Q^2 + Q^3) = -2 - 12Q + 7.5Q^2 - Q^3$$
$$pour\ 1 \Rightarrow \Pi_t = -2 - 12(1) + 7.5(1)^2 - (1)^3 = -7.5$$
$$pour\ 4 \Rightarrow \Pi_t = -2 - 12(4) + 7.5(4)^2 - (4)^3 = 6$$

3.4) Calculez maintenant ses profits totaux, ses profits moyens et ses profits marginaux.

$$\Pi_t = (45Q - 0.5\ Q^2) - (2 + 57Q - 8Q^2 + Q^3) = -2 - 12Q + 7.5Q^2 - Q^3$$
$$= -2 - 12(4) + 7.5(4)^2 - (4)^3 = 6$$

$$\Pi_t \mathrm{M} = \frac{\Pi_t}{Q} = 6/4 = 1.50\$$$

$$\frac{d\Pi_t}{dQ} = \Pi_t \mathrm{m} = 0 \text{ car elle maximise!}$$

3.5) Calculez l'indice de Lerner (L) lorsque la firme maximise ses profits.

Il faut trouver P et Cm de la solution du monopoleur.
Avec Q=4 on substitue dans la demande pour trouver $P = 45 - 0.5Q = 45 - 0.5 \cdot 4 = 43$
Et pour le Cm on a $Cm = 57 - 16Q + 3Q^2 = 57 - 16(4) + 3(4)^2 = 41$

$$\mathrm{L} = (\mathrm{P} - \mathrm{Cm}) / \mathrm{P} = (43 - 41) / 43 = 0.0465$$

3.6) Si le gouvernement décide de réglementer cette firme en lui imposant un prix de concurrence parfaite, quel sera ce prix ? Combien d'unités la firme produira-t-elle et quels seront ses profits totaux ? La réglementation est-elle efficace ?

$$P = Cm$$
$$45 - 0.5Q = 57 - 16Q + 3Q^2$$
$$-3Q^2 + 15.5Q - 12 = 0$$
$$\text{est de la forme } ax^2 + bx + c = 0$$
$$\text{avec}$$
$$a = -3$$
$$b = 15.5$$
$$c = -12$$
$$\text{on trouve les racines avec}$$
$$Q^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-15.5 \pm \sqrt{15.5^2 - 4(-3)(-12)}}{2(-3)}$$

$$Q_1^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-15.5 + \sqrt{15.5^2 - 4(-3)(-12)}}{2(-3)} = 0.948215260804285$$
$$\text{et } Q_2^* = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-15.5 - \sqrt{15.5^2 - 4(-3)(-12)}}{2(-3)} = 4.21845140586238$$

$Avec\ Q_1^* = 0.948215260804285 \Rightarrow \Pi_t = -2 - 12Q + 7.5Q^2 - Q^3 =$ -7.48779366451596 < 0

$Avec\ Q_2^* = 4.21845140586238 \Rightarrow \Pi_t = -2 - 12Q + 7.5Q^2 - Q^3 = 5.774830701553$ < 0

Donc on solutionne avec : $Q \approx 4,22$ car les profits sont plus élevés et positifs

$P = 45 - 0.5Q = 45 - 0.5(4,22) = 42.8907742970688 = \$42,89$

La réglementation fait passer le prix de \$43,00 à \$42,89. Pas très efficace car la demande semble assez élastique.

```
a=-3
b=15.5
c=-12
Q1=(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a)
Q2=(-b-sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a)

q=Q1
profits=-2-12*q+7.5*q^2-q^3
-7.48779366451596

q=Q2
profits=-2-12*q+7.5*q^2-q^3
5.774830701553
```

4) Voici quelques informations relatives au marché du GUIZMO en monopole:

$$Q \; = \; -P\,/\,4 \; + \; 50 \qquad \Leftrightarrow \qquad P = 4(50-Q) = 200-4Q$$ (demande à la firme)

$$CTM \; = \; \frac{800}{Q} \; + \; Q$$ (coûts de la firme)

4.1) Identifiez la quantité qui maximiserait les profits totaux de cette firme. À quel prix vendrait-elle alors son GUIZMO ?

On cherche Rm=Cm

$$\begin{aligned}
&RT = P \cdot Q = (200-4Q)Q = 200Q - 4Q^2 \\
&CT = Q \cdot CTM = Q\left(\frac{800}{Q} \; + \; Q\right) = 800 + Q^2 \\
&Cm = \frac{dCT}{dQ} = 2Q \\
&Rm = \frac{dRT}{dQ} = 200 - 8Q \\
&Cm = Rm \\
&2Q = 200 - 8Q \\
&\Rightarrow 10Q = 200 \\
&\Rightarrow Q = 20 \\
&\Rightarrow P = 200 - 4Q = 200 - 4(20) = 120
\end{aligned}$$

Ou par maximisation

$$\max_Q \Pi_t \qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad \max_Q RT - CT$$

$$\Rightarrow \frac{d\Pi_t}{dQ} = \Pi_t m = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \frac{d(RT-CT)}{dQ} = Rm - Cm = 0 \quad \Rightarrow Rm = Cm$$

$$\begin{aligned}
&\Pi_t = RT - CT = (200Q - 4Q^2) - (800 + Q^2) \\
&= -800 + 200Q - 5Q^2 \\
&\max_Q \Pi_t \;\; \Rightarrow \max_Q \;\; -800 + 200Q - 5Q^2 \\
&\Rightarrow \Pi_t \mathrm{m} \; = \frac{d\Pi_t}{dQ} = 200 - 10Q = 0 \\
&\Rightarrow Q = 20 \\
&\Rightarrow P = 200 - 4Q = 200 - 4(20) = 120
\end{aligned}$$

4.2) Si la firme produit la quantité identifiée en 4.1, quelles sont ses recettes totales, ses recettes moyennes, ses profits totaux, son profit moyen ainsi que son profit marginal ?

$$
\begin{aligned}
RT &= P \cdot Q = 120 \cdot 20 = 2\ 400\$ \\
RM &= \frac{RT}{Q} = \frac{2\ 400\$}{20} = 120\$ \\
CT &= 800 + Q^2 = 800 + 20^2 = 1\ 200\$ \\
\Pi_t &= RT - CT = 2\ 400\$ - 1\ 200\$ = 1\ 200\$ \\
\Pi_t M &= \frac{\Pi_t}{Q} = \frac{1\ 200\$}{20} = 60\$ \\
\Pi_t m &= 200 - 10Q = 200 - 10 \cdot 20 = 0
\end{aligned}
$$

4.3) Définissez et calculez l'indice de Lerner lorsque la firme maximise son profit total.

On a besoin de P et Cm de la solution du monopoleur.
Et pour le Cm on a $Cm = 2Q = 2 \cdot 20 = 40$

$$\mathrm{L} = (\mathrm{P} - \mathrm{Cm}) / \mathrm{P} = (120 - 40) / 120 = 0.6666666666667$$

Déf. : capacité que possède une firme de fixer son P au-dessus du Cm, ici elle est assez forte car plus près de 1 que de 0.

4.4) Si la firme décidait plutôt de maximiser ses recettes totales, quelle quantité choisirait-elle alors ? À quel prix vendrait-elle son GUIZMO ? Expliquez pourquoi ce volume de production diffère de celui calculé en 4.1.

$$RT = P \cdot Q = (200 - 4Q)Q = 200Q - 4Q^2$$
$$\max_Q \ 200Q - 4Q^2$$
$$Rm = \frac{dRT}{dQ} = 200 - 8Q = 0$$
$$\Rightarrow 200 = 8Q \Rightarrow Q = \frac{200}{8} = 25$$

Maintenant pour le prix on substitue dans la demande
$$P = 200 - 4Q = 200 - 4 \cdot 25 = 100\$$$

On produit plus si on maximise les recettes totales (25) que si on maximise les profits (20), ici c'est parce que les coûts augmentent plus vite que les recettes en raison des rendements décroissants, donc le monopoleur limite les quantités. Mais maximiser la recette totale serait un comportement ridicule pour un monopoleur car on ne tient pas compte des coûts!

4.5) Supposons que le gouvernement décide d'intervenir et de réglementer ce monopole en lui imposant la solution concurrentielle (P = Cm). Combien de GUIZMO la firme vendrait-elle alors et à quel prix ? Calculez ses profits totaux et comparez-les avec ceux obtenus en 4.2. La réglementation est-elle efficace ? Calculez également le nouvel indice de Lerner.

En imposant la solution de concurrence parfaite au monopoleur on impose P=Cm, égalisons :

$$P = Cm$$

$$200 - 4Q = 2Q \Rightarrow 200 = 6Q$$

$$\Rightarrow Q = 33,33....$$

$$P = 200 - 4Q = 200 - 4(33,33) = 66.67\$$$

$$\Pi_t = RT - CT$$

$$= (200Q - 4Q^2) - (800 + Q^2)$$

$$= (200(33,33...) - 4(33,33...)^2) - (800 + (33,33...)^2) = 2222.22222222222 - 1911.11111111111$$

$$= 311,11111111$$

$$= 311,11\$$$

Oui, la réglementation semble efficace car les profits sont 4 fois moindres
On a besoin de P et Cm de la solution du monopoleur.
Et pour le Cm on a $Cm = 2Q = 2 \cdot 33.3333333... = 66.666666666....$

$$\mathrm{L} = \frac{(\mathrm{P} - \mathrm{Cm})}{P} = \frac{(66.6666666... - 2 \cdot 33.333333333...)}{66.6666666...} = 0$$

5) Considérons un monopole discriminant. Il vend son produit au Canada et sur le marché étranger. Nous avons les informations suivantes:

$Q_i = 24 - 0.2\mathrm{P}_i$ (demande intérieure)

$\mathrm{Q}_e = 10 - 0.05\mathrm{P}_e$ (demande extérieure)

$\mathrm{CT} = 35 + 40\mathrm{Q}$ (son coûts total, où Q = quantités vendues sur les deux marchés)

5.1) En supposant qu'elle désire maximiser ses profits sur chaque marché, quel prix fixera la firme sur chacun d'eux si elle fait de la discrimination de prix? Quelle quantité offrira-t-elle alors sur chacun de ces marchés?

Notez que $Cm = \dfrac{dCT}{dQ} = \dfrac{d(35 + 40Q)}{dQ} = 40$

Marché intérieur : on produit sur ce marché avec $\mathrm{Rm}_i = \mathrm{Cm}$

$\mathrm{P}_i = 120 - 5\mathrm{Q}_i \Rightarrow \mathrm{Q}_i = 24 - 0.2\mathrm{P}_i$

$\mathrm{Rm}_i = 120 - 10\mathrm{Q}_i$

$\mathrm{Rm}_i = \mathrm{Cm}$

$120 - 10\mathrm{Q}_i = 40$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Q}_i = 8 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_i = 80\$$

On pourrait aussi maximiser les profits au long, on trouverait la même solution

Marché étranger : on produit sur ce marché avec $\mathrm{Rm}_e = \mathrm{Cm}$

$\mathrm{P}_e = 200 - 20\mathrm{Q}_e \Rightarrow \mathrm{Q}_e = 10 - 0.05\mathrm{P}_e$

$\mathrm{Rm}_e = 200 - 40\mathrm{Q}_e$

$\mathrm{Rm}_e = \mathrm{Cm}$

$200 - 40\mathrm{Q}_e = 40$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Q}_e = 4 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_e = 120\$$

On pourrait aussi maximiser les profits au long, on trouverait la même solution

5.2) Quels profits totaux réalisera-t-elle en tout si elle fait de la discrimination de prix?

$$\begin{aligned}
\Pi_t &= RT - CT \\
&= (RT_i + RT_e) - CT \\
&= (P_i \cdot Q_i + P_e \cdot Q_e) - CT \\
&= (80\$ \cdot 8 + 120\$ \cdot 4) - (35 + 40(Q_i + Q_e)) \\
&= (80\$ \cdot 8 + 120\$ \cdot 4) - (35 + 40(12)) \\
&= 605\$
\end{aligned}$$

5.3) En supposant maintenant qu'elle désire maximiser ses profits sur les deux marchés ensemble, quel prix fixera la firme sur ces deux marchés si elle ne fait pas de discrimination de prix? Quelle quantité offrira-t-elle en tout sur les deux marchés?

On doit trouver la demande agrégée (de marché) en cumulant les quantités

$$Q = Q_i + Q_e$$

$$Q = (24 - 0.2\text{P}) + (10 - 0.05\text{P})$$

$$\text{Q} = 34 - 0.25\text{P}$$

$$\Rightarrow \text{P} = 136 - 4\text{Q}$$

$$\text{Rm} = 136 - 8\text{Q}$$

On cherche Q tel que

$$\text{Rm} = \text{Cm}$$

$$136 - 8\text{Q} = 40$$

$$\Rightarrow \quad \text{Q} = 12 \quad \text{et} \quad \text{P} = 136 - 8\text{Q} = 136 - 8(12) = 88\$$$

5.4) Quel profit total réalisera-t-elle si elle ne fait pas de discrimination de prix? Comparez vos résultats avec ceux obtenus en 5.2 et dites pourquoi ils divergent.

$$\Pi_t = RT - CT$$

$$= P \cdot Q - (35 + 40Q)$$

$$= (88\$ \cdot 12) - (35 + 40(12))$$

$$= 541\$$$

Même si Q reste le même, il est plus rentable de discriminer (605$ vs. 541$). La firme peut ainsi aller cherche une partie du surplus du consommateur

6) Ce monopole naturel est caractérisé par les équations de demande et de coûts suivantes :

$Qd = -2P + 120$ $\qquad\qquad$ $CT = 500 + 10Q$

6.1) Si la firme désire maximiser ses profits, quelle quantité choisira-t-elle de produire ? À quel prix vendra-t-elle ses produits ?

On cherche la quantité telle que $Rm = Cm$ qui est la solution du monopoleur

$$Q = -2P + 120$$

$$P = -\frac{Q}{2} + 60$$

$$RT = \left(-\frac{Q}{2} + 60\right)Q$$

$$Rm = \frac{dRT}{dQ} = -Q + 60$$

$$Cm = \frac{dCT}{dQ} = \frac{d(500 + 10Q)}{dQ} = 10$$

$$Rm = Cm$$

$$-Q + 60 = 10$$

$$\Rightarrow Q = 50 \;\; et \;\; P = -\frac{Q}{2} + 60 = -\frac{50}{2} + 60 = 35\$$$

6.2) Calculez alors ses recettes totales, ses coûts totaux, ses profits totaux, son profit moyen et son profit marginal.

$$RT = \left(-\frac{Q}{2} + 60\right)Q = \left(-\frac{50}{2} + 60\right)50 = 1\ 750\$$$

$$CT = 500 + 10Q = 500 + 10(50) = 1\ 000\$$$

$$\Pi_t = RT - CT = 1\ 750\$ - 1000\$ = 750\$$$

$$\Pi_t M = \frac{\Pi_t}{Q} = \frac{750\$}{50} = 15\$$$

$$\Pi_t m = 0 \text{ car c'est à Rm=Cm que l'on maximise les profits et que l'on a donc } \Pi_t m = 0$$

6.3) Supposons que le gouvernement décide de réglementer ce monopole et qu'il lui impose la solution concurrentielle (P = Cm). À quel prix la firme vendra-t-elle alors ses produits ? Calculez ses profits. Qu'en concluez-vous ?

On impose

$$P = Cm$$

$$-\frac{Q}{2} + 60 = 10$$

$$\Rightarrow Q = 100 \;\; et \;\; P = 10\$$$

$$\Pi_t = RT - CT$$

$$\Pi_t = [\left(60 - (Q/2)\right) \cdot Q] - (500 + 10Q)) = [10 \cdot 100] - [500 + 10(100)]$$

$$\Pi_t = -500\$ < 0$$

La réglementation fait passer le prix de 35$ à 10$ et force la firme à faire des pertes $\Pi_t < 0$! Elle produirait dans ces conditions que pour couvrir les coûts variables $CVM = 10$. Mais les CF sont des pertes.

6.4) Le gouvernement peut réglementer d'une autre manière : obliger la firme à fixer un prix égal à son CTM. Quel serait ce prix ? Et les profits ? Comparez avec 6.3.

$$P \;=\; CTM$$

$$60-\frac{Q}{2}= \frac{500}{Q} \;+\; 10$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{2} \;-50+\frac{500}{Q}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Q^2 \;-50Q\;+500=0$$

$$\Rightarrow 1Q^2 \;-100Q\;+1000=0$$

est de la forme $ax^2+bx+c=0$

avec

$a=1$

$b=-100$

$c=1000$

on trouve les racines avec

$$Q^* = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-100)\pm\sqrt{(-100)^2-4(1)(1000)}}{2(1)}$$

$$Q_1^* = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-100)+\sqrt{(-100)^2-4(1)(1000)}}{2(1)}=88.7298334620742$$

$$\text{et}\quad Q_2^* = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-100)-\sqrt{(-100)^2-4(1)(1000)}}{2(1)}=11.2701665379258$$

$$Avec\;\; Q_1^* = 88.7298334620742 \Rightarrow \Pi_t \;=\; [\left(60-(Q\,/\,2)\right)\cdot Q]-(500+10Q))=0$$

$$Avec\;\; Q_2^* = 11.2701665379258 \Rightarrow \Pi_t \;=\; [\left(60-(Q\,/\,2)\right)\cdot Q]-(500+10Q))=0$$

Alors on solutionne avec : $Q \;\approx\; 88.73$

$$P \;=\; 60-(Q\,/\,2)=\; 60-(88.7298334620742\,/\,2)=15.6350832689629=\$15.64$$

La réglementation fait passer le prix de \$35,00 à \$15.64.

Il n'y a plus de profits économiques $\Pi_t = 0$. Reste seulement le coût de renonciation du capital.
Il y aurait une perte sèche, mais c'est mieux que de pousser la firme à faire des pertes et à se retirer du marché….