Exo2

1- Soit a , b , c , d , e et f des constantes, et X et Y des variables aléatoires (v.a.). Montrez que

a) $var(a+bX)=b^2var(X)$

b) $var(a+bX+cY)=b^2var(X)+c^2\,\mathrm{var}(Y)+2bc\,\mathrm{cov}(X,Y)$

c) $\mathrm{cov}(a+bX+cY,d+eX+fY)=be\,\mathrm{var}(X)+cf\,\mathrm{var}(Y)+(bf+ce)\,\mathrm{cov}(X,Y)$

2- Indépendance et corrélations

a) Montrez que si les v.a. X et Y sont indépendantes, alors $E(XY)=E(X)E(Y)=\mu_x\mu_y$ avec $\mu_x=E(X)$ et $\mu_y=E(Y)$. Ainsi montrez aussi que $\mathrm{cov}(X,Y)=E(X-\mu_x)(Y-\mu_y)=0$

b) Montrez que si $Y=a+bX$, avec a et b des constantes, alors $\rho_{xy}=1$ si $b>0$ et $\rho_{xy}=-1$ si $b<0$.

3- Soit $X=-2,-1,0,1,2$ avec des probabilités données par $P(X=x)=1/5=0.2$. De plus, assumez une relation quadratique parfaite entre X et Y , soit $Y=X^2$.

a) Montrez que $\mathrm{cov}(X,Y)=E(X^3)=0$.

b) Déduisez que $\rho_{XY}=corr(X,Y)=0$

4- Dans le modèle de régression linéaire, démontrez que $y'X\beta=\beta'X'y$

5- Réécrivez l'expression des estimateurs des MCO de β_1 et de β_2 dans le cas des matrices $X=[\iota\quad x_{i2}]_{n\times 2}$ avec $\iota=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}_{n\times 1}$ en utilisant les sommations dans la réponse finale.

6- Pour la régression simple avec une constante $y_i=\beta_1+\beta_2x_{i2}+\varepsilon_i$ vérifiez que les propriétés de l'estimateur des MCO suivantes tiennent.

$\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i=0$, $\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i\,x_{i2}=0$, $\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i\,\hat{y}_i=0$ et $\sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$

7- Pour la régression avec une constante suivante $y_i = \beta_1 + \varepsilon_i$ avec $\varepsilon_i \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$, vérifiez que l'estimateur des moindres carrés de β_1 est tel que $\hat{\beta}_1 = \overline{y}$, que $\mathrm{var}(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 / n$ et que la somme des résidus au carré est donnée par $\sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{y}}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$

8- Pour la régression sans constante $y_i = \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i$ avec $\varepsilon_i \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$

a) Dérivez l'estimateur des MCO de β_1 et trouvez sa variance.

b) Quelles propriétés de l'estimateur des MCO décrites dans la question 6 tiennent toujours pour ce modèle.

9- Prouvez que $tr(AB) = tr(BA)$ avec A et B deux matrices quelconques, non nécessairement carrées, pouvant être multipliées.

10- Prouvez que $tr(A'A) = \sum_i \sum_j a_{ij}^2$.

11- Si x a une distribution normale de moyenne 1 de d'écart-type 3, explicitez :

a) $P(|x| > 2)$

b) $P(x > -1 | x < 1.5)$

12- Étant donné la distribution de probabilité jointe suivante :

		X		
		0	1	2
Y	0	**0.05**	**0.1**	**0.03**
	1	**0.21**	**0.11**	**0.19**
	2	**0.08**	**0.15**	**0.08**

a) Calculez les probabilités suivantes $P(Y < 2)$, $P(Y < 2, X > 0)$, $P(Y = 1, X \geq 1)$

b) Trouvez les distributions marginales de X et Y

c) Calculez $E(X)$, $E(Y)$, $var(X)$, $var(Y)$, $cov(X,Y)$ et $E(X^2Y^3)$

d) Calculez la $\mathrm{cov}(Y, X^2)$

e) Quelles sont les distributions conditionnelles de Y, étant donné que $X = 2$ et celle de X étant donné que $Y > 0$?

f) Trouvez $E(Y | X)$ et $var(Y | X)$. Obtenez les deux parties de la décomposition de la variance $var(Y) = E_x[var(Y | X)] + var_x[E(Y | X)]$