Exo8

Q1. Nous avons le modèle suivant: $y_i = \beta_1 + x_{i2}\beta_2 + x_{i3}\beta_3 + \varepsilon_i$ où les aléas sont distribués tel que

$$\varepsilon \sim N\left(0_{n\times 1}\ ,\ \sigma^2\begin{bmatrix}\Lambda_1 & 0\\ 0 & \Lambda_2\end{bmatrix}_{n\times n}\right)$$

avec les matrices diagonales suivantes $\Lambda_1 = c_1 I_{n_1}$ et $\Lambda_2 = c_2 I_{n_2}$, de dimension n_1 et n_2 respectivement, et où

c_1 et c_2 sont des constantes.

a) Trouvez une manière efficace d'estimer β sans biais.
Dérivez l'estimateur à partir de son critère (en faisant les conditions de premier ordre, FOC).
De plus, écrivez sa variance (la matrice de variance-covariance de votre estimateur $\hat{\beta}$).
Discutez des propriétés de cet estimateur dans ce contexte.

b) Construisez un test de restrictions linéaires de la nulle

$$H_0 : \begin{bmatrix}\beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad H_1 : \begin{bmatrix}\beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

N'oubliez pas de bien indiquer la distribution que suit ce test et les règles de décision.

c) Comme dans la pratique vous n'êtes jamais certain de la normalité, vous faites un test de Jarques-Bera et vous obtenez une valeur de 1001 pour le ratio $\left(\widehat{\mu}_3 \ / \ \hat{\sigma}^3\right)$ obtenu à partir des résidus de votre régression. Quelles sont les implications pour vos réponses en 3a) et 3b)

Q2 -Nous avons le modèle suivant :
$y_t = \beta_1 + x_{t2}\beta_2 + x_{t3}\beta_3 + \varepsilon_t$ avec $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma_t^2)$ et $\sigma_t^2 = \delta + \alpha x_{t2}^2$

Expliquez de façon détaillée comment vous estimeriez de manière efficace ce modèle si vous connaissez les paramètres δ et α .
Qu'est-ce qui changerait si vous ne connaissez pas les paramètres δ et α ? Expliquez de façon détaillée ce que vous feriez dans ce cas.

Q3 - Nous avons le modèle suivant : $y_t = \beta_1 + x_{t2}\beta_2 + \varepsilon_t$
avec $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2\Omega)$, $\Omega \neq I$, $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$, $\left|\rho\right| < 1$ et $v_t \sim i.i.d.(0,\sigma_v^2)$

Expliquez de façon détaillée comment vous estimeriez de manière efficace tous les paramètres inconnus de ce modèle si vous connaissez le paramètre ρ .
Qu'est-ce qui changerait si vous ne connaissez pas le paramètre ρ ? Expliquez de façon détaillée ce que vous feriez dans ce cas pour estimer tous les paramètres inconnus en utilisant un estimateur FGLS en version itérée.

Q4- Avec le modèle suivant : $y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t$ où $\varepsilon_t \sim i.i.d(0,\sigma_\varepsilon^2)$. Détaillez comment vous construiriez le test de WALD de la restriction non-linéaire associée à la nulle suivante H_0 : $\beta_1\beta_2 = 2$.

Q5- Nous avons la variable aléatoire suivante $X \sim i.i.d.(\mu_X, \sigma_X^2)$. Élaborez sur les propriétés de l'estimateur de la moyenne suivant : $\hat{\theta} = \frac{1}{g} x_1 + \frac{(g-1)}{g} \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=2}^{n} x_i$

a) Calculez son espérance
b) Calculez sa variance
c) Dites si l'estimateur est consistant (convergent en probabilité) en général. Y a-t-il un cas particulier?