

Q5 Avec le modèle suivant $y_i = \beta_1 + x_{i2}\beta_2 + \varepsilon_i$ avec $\varepsilon_i \sim i.i.d.N(0, \sigma^2)$ où l'échantillon se sépare en deux groupes d'observations. Groupe 1 $i = 1, \dots, n_1$ et Groupe 2 $i = n_1 + 1, \dots, n$ avec $n_1 + n_2 = n$

- a) Effectuez un test de student de la nulle de stabilité de β_1 entre les deux sous groupes (sous l'hypothèse A6 de normalité des aléas)
- b) Effectuez un test de student de la nulle de stabilité de β_2 entre les deux sous groupes (sous l'hypothèse A6 de normalité des aléas)
- c) Effectuez un test F de la nulle de stabilité de β_1 et de β_2 entre les deux sous groupes via des variables dummy (dichotomiques) (sous l'hypothèse A6 de normalité des aléas)

Q5 Voir la section sur les variables dichotomiques et sur les tests de Fisher de restrictions.

Voici une piste de solution.

5a)

On utilise le modèle a) de variables Dummy comme défini à la section sur les variables dummy:

$$y = X\beta + \varepsilon = \underbrace{\begin{bmatrix} \iota & d_1^{[1\&0]} & x_2^{[n_1 \& n_2]} \end{bmatrix}}_{n \times 3} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1^+ \\ \beta_2 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \varepsilon = \begin{bmatrix} \iota_{n_1} & \iota_{n_1} & x_2^{[n_1]} \\ \iota_{n_2} & 0_{n_2} & x_2^{[n_2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1^+ \\ \beta_2 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \varepsilon$$

On l'estime et on teste $H_0 : \beta_1^+ = 0$ vs $H_1 : \beta_1^+ \neq 0$ avec un test de student typique.

On peut aussi utiliser le modèle b) comme défini à la section les variables dummy.

$$y = X\beta + \varepsilon = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & d_1^* & x_2^{[n_1 \& n_2]} \end{bmatrix}}_{n \times 3} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1^* \\ \beta_2 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \varepsilon = \begin{bmatrix} \iota_{n_1} & 0_{n_1} & x_2^{[n_1]} \\ 0_{n_2} & \iota_{n_2} & x_2^{[n_2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1^* \\ \beta_2 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \varepsilon$$

On l'estime et on teste $H_0 : \beta_1 = \beta_1^*$ vs $H_1 : \beta_1 \neq \beta_1^*$ avec un test F typique avec le vecteur de restriction $R = [1 \quad -1 \quad 0]$ et $r = [0]$. Donc $J=1$.

La forme générale du test est

$$F = \frac{(R\hat{\beta} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r) / 1}{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} / (n - 3)} \sim F(1, n - 3)$$

5b) Ici la logique est la même, mais pour la variable x_2

On définit le modèle **c)** (comme défini à la section les variables dummy) suivant:

$$y = X\beta + \varepsilon = \underbrace{\begin{bmatrix} \iota & x_2 \begin{bmatrix} 0_{n_1} \\ x_2^{[n_2]} \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{n \times 3} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_2^+ \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \varepsilon = \begin{bmatrix} \iota_{n_1} & x_2^{[n_1]} & 0_{n_1} \\ \iota_{n_2} & x_2^{[n_2]} & x_2^{[n_2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_2^+ \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \varepsilon$$

Et on teste $H_0 : \beta_2^+ = 0$ vs $H_1 : \beta_2^+ \neq 0$ avec un test de student typique.

Ou bien on définit le modèle suivant :

$$y = X\beta + \varepsilon = \underbrace{\begin{bmatrix} \iota & \begin{bmatrix} x_2^{[n_1]} \\ 0_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n_1} \\ x_2^{[n_2]} \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{n \times 3} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_2^* \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \varepsilon = \begin{bmatrix} \iota_{n_1} & x_2^{[n_1]} & 0_{n_1} \\ \iota_{n_2} & 0_{n_2} & x_2^{[n_2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_2^* \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \varepsilon$$

On l'estime et on teste $H_0 : \beta_2 = \beta_2^*$ vs $H_1 : \beta_2 \neq \beta_2^*$ avec un test F typique avec le vecteur de restriction $R = [0 \quad 1 \quad -1]$ et $r = [0]$

$$F = \frac{(R\hat{\beta} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r) / 1}{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} / (n - 3)} \sim F(1, n - 3)$$

5c) On définit le modèle suivant :

$$y = X\beta + \varepsilon = \underbrace{\begin{bmatrix} \iota & \begin{bmatrix} 0 \\ \iota \end{bmatrix}_{n_1} & \begin{bmatrix} x_2^{[n_1]} \\ x_2^{[n_2]} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^{[n_2]} \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{n \times 4} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1^+ \\ \beta_2 \\ \beta_2^+ \end{bmatrix}_{4 \times 1} + \varepsilon = \begin{bmatrix} \iota & 0 & x_2^{[n_1]} & 0 \\ \iota & \iota & x_2^{[n_2]} & x_2^{[n_2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1^+ \\ \beta_2 \\ \beta_2^+ \end{bmatrix}_{4 \times 1} + \varepsilon$$

On l'estime et on teste $H_0 : \begin{bmatrix} \beta_1^+ \\ \beta_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ vs $H_1 : \begin{bmatrix} \beta_1^+ \\ \beta_2^+ \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ avec un test F typique avec la matrice de restrictions

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{(R\hat{\beta} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r) / 2}{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} / (n - 4)} \sim F(2, n - 4)$$

Ou bien on définit le modèle suivant

$$y = X\beta + \varepsilon = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \iota \\ 0 \end{bmatrix}_{n_1} & \begin{bmatrix} 0 \\ \iota \end{bmatrix}_{n_2} & \begin{bmatrix} x_2^{[n_1]} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^{[n_2]} \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{n \times 4} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1^* \\ \beta_2 \\ \beta_2^* \end{bmatrix}_{4 \times 1} + \varepsilon = \begin{bmatrix} \iota & 0 & x_2^{[n_1]} & 0 \\ 0 & \iota & 0 & x_2^{[n_2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1^* \\ \beta_2 \\ \beta_2^* \end{bmatrix}_{4 \times 1} + \varepsilon$$

On l'estime et on teste $H_0 : \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^* \\ \beta_2^* \end{bmatrix}$ vs $H_1 : \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \beta_1^* \\ \beta_2^* \end{bmatrix}$ avec un test F typique avec la matrice de restrictions

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{(R\hat{\beta} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r) / 2}{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} / (n - 4)} \sim F(2, n - 4)$$