Exo12

Q1 - Calculez les ACF et PACF du processus stationnaire AR(1) avec constante

$x_t = \delta + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$ avec $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0,\sigma_\varepsilon^2)$

Q2 - Calculez les prévisions optimales, la variance des prévisions 1,2 et h periodes en avant (step ahead) du processus suivant ainsi que l'intervalle de confiances à 95% de ces prévisions:

$y_t = \delta + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ avec $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0,\sigma_\varepsilon^2)$

Q3 - Calculez les prévisions optimales, la variance des prévisions 1,2,3 et h periodes en avant (step ahead) du processus suivant ainsi que l'intervalle de confiances à 95% de ces prévisions:

$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ avec $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0,\sigma_\varepsilon^2)$

Q4- Le processus de moyenne conditionnelle est $r_t = x_{(t)}'\beta + \varepsilon_t$.

On a aussi un processus ARCH(1) pour les aléas tel que $\varepsilon_t = z_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}$ avec $z_t \sim i.i.d.N(0,1)$.

a) Montrez que l'espérance non-conditionnelle $E(\varepsilon_t) = 0$

b) Montrez que la variance conditionnelle de ε_t avec l'information en $t-1$ est $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$

c) Montrez que la variance non-conditionnelle de ε_t est $\sigma^2 = \dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$

d) Montrez que $E_{t-1}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0$

Q1- Solutions
En prenant l'espérance

$$Ex_t = \delta + \phi E x_{t-1} + E\varepsilon_t$$

Si le processus est stationnaire $Ex_t = Ex_{t-1} = \mu_x$

On a donc $\mu_x = \delta + \phi\mu_x$ qui nous donne $\mu_x - \phi\mu_x = \delta \quad \Rightarrow \quad \mu_x = \dfrac{\delta}{1-\phi}$

On soustrait la moyenne du processus original des deux côtés

$$x_t - \left(\frac{\delta}{1-\phi}\right) = \delta - \left(\frac{\delta}{1-\phi}\right) + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t = \delta\left(\frac{1-\phi}{1-\phi}\right) - \left(\frac{\delta}{1-\phi}\right) + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$= \left(\frac{\delta - \delta\phi - \delta}{1-\phi}\right) + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t = \left(\frac{-\delta\phi}{1-\phi}\right) + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t = \phi\underbrace{\left(x_{t-1} - \left(\frac{\delta}{1-\phi}\right)\right)}_{y_{t-1}} + \varepsilon_t$$

On définit x_t moins sa moyenne comme $y_t \equiv x_t - Ex_t = x_t - \left(\dfrac{\delta}{1-\phi}\right)$ et on peut écrire le processus

Comme $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$ et travailler comme à l'habitude pour trouver

$$\gamma_j = \operatorname{cov}(x_t, x_{t-j}) = \operatorname{cov}(y_t, y_{t-j}) \quad \text{et} \quad \rho_j = \operatorname{corr}(x_t, x_{t-j}) = \operatorname{corr}(y_t, y_{t-j}) = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}$$

Q2-

La prévision optimale pour h=1 est

$$y^*_{t+1|t} = E_t\, y_{t+1} = E_t\,(\delta + \varepsilon_{t+1} + \theta_1\, \varepsilon_t\,) = \delta + 0 + \theta_1\, \varepsilon_t$$

car $E_t\, \varepsilon_{t+1} = 0$ et qu'en théorie $E_t\, \varepsilon_t = \varepsilon_t$

Notez que si on a des estimés $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\delta}$ on ne connait pas exactement ε_t .

$$MSE(y^*_{t+1|t}) = E(y_{t+1} - y^*_{t+1|t})^2 = E((\delta + \varepsilon_{t+1} + \theta_1\, \varepsilon_t\,) - (\delta + \theta_1\, \varepsilon_t\,))^2 = E(\varepsilon_{t+1})^2 = \sigma^2_\varepsilon$$

La prévision optimale pour h=2 est

$$y^*_{t+2|t} = E_t\, y_{t+2} = E_t\,(\delta + \varepsilon_{t+2} + \theta_1\, \varepsilon_{t+1}) = \delta + 0 + 0$$

car $E_t\, \varepsilon_{t+1} = 0$ et $E_t\, \varepsilon_{t+2} = 0$

$$MSE(y^*_{t+2|t}) = E(y_{t+2} - y^*_{t+2|t})^2 = E((\delta + \varepsilon_{t+2} + \theta_1\, \varepsilon_{t+1}) - (\delta))^2 = E(\varepsilon_{t+2} + \theta_1\, \varepsilon_{t+1})^2 = (1+\theta_1^2)\sigma^2_\varepsilon$$

La prévision optimale pour $h > 2$ est

$$y^*_{t+h|t} = E_t\, y_{t+h} = E_t\,(\delta + \varepsilon_{t+h} + \theta_1\, \varepsilon_{t+h-1}) = \delta + 0 + 0$$

car $E_t\, \varepsilon_{t+h-1} = 0$ et $E_t\, \varepsilon_{t+h} = 0$

$$MSE(y^*_{t+h|t}) = E(y_{t+h} - y^*_{t+h|t})^2 = E((\delta + \varepsilon_{t+h} + \theta_1\, \varepsilon_{t+h-1}) - (\delta))^2 = E(\varepsilon_{t+h} + \theta_1\, \varepsilon_{t+h-1})^2 = (1+\theta_1^2)\sigma^2_\varepsilon$$

Pour un MA(1) généralement on a les prévisions suivantes

$$y^*_{t+h|t} = \begin{cases} \delta + \theta_1\, \varepsilon_t & h = 1 \\ \delta & h > 1 \end{cases}$$

$$MSE(y^*_{t+h|t}) = E(y_{t+h} - y^*_{t+h|t})^2 = E((\delta + \varepsilon_{t+h} + \theta_1\, \varepsilon_{t+h-1}) - (\delta))^2 = E(\varepsilon_{t+h} + \theta_1\, \varepsilon_{t+h-1})^2 = (1+\theta_1^2)\sigma^2_\varepsilon$$

$$MSE(y^*_{t+h|t}) = \begin{cases} \sigma^2_\varepsilon & h = 1 \\ (1+\theta_1^2)\sigma^2_\varepsilon & h > 1 \end{cases}$$

$$\left[y^*_{t+h|t} - 1.96\sqrt{MSE(y^*_{t+h|t})} \quad , \quad y^*_{t+h|t} + 1.96\sqrt{MSE(y^*_{t+h|t})} \right]$$

Pour un intervalle de confiance à $1 - \alpha = 0.95$

Q3-
La prévision optimale pour un horizon $h = 1$ est

$$y^*_{t+1|t} = E_t\, y_{t+1} = E_t\,(\delta + \phi_1 y_t + \varepsilon_{t+1} + \theta_1 \varepsilon_t) = \delta + \phi_1 y_t + 0 + \theta_1 \varepsilon_t$$

car $E_t\, \varepsilon_{t+1} = 0$ et qu'en théorie $E_t\, \varepsilon_t = \varepsilon_t$

$$MSE(y^*_{t+1|t}) = E(y_{t+1} - y^*_{t+1|t})^2 = E((\delta + \phi_1 y_t + \varepsilon_{t+1} + \theta_1 \varepsilon_t) - (\delta + \phi_1 y_t + \theta_1 \varepsilon_t))^2 = E(\varepsilon_{t+1})^2 = \sigma^2_\varepsilon$$

La prévision optimale pour un horizon $h = 2$ est

$$\begin{aligned}
y^*_{t+2|t} &= E_t\, y_{t+2} = E_t\,(\delta + \phi_1 y_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \theta_1 \varepsilon_{t+1}) = \delta + \phi_1 E_t\, y_{t+1} + 0 + 0 \\
&= \delta + \phi_1 E_t\,(\delta + \phi_1 y_t + \varepsilon_{t+1} + \theta_1 \varepsilon_t) \\
&= \delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 y_t + 0 + \phi_1 \theta_1 \varepsilon_t
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
&MSE(y^*_{t+2|t}) = E(y_{t+2} - y^*_{t+2|t})^2 \\
&= E((\delta + \phi_1(\delta + \phi_1 y_t + \varepsilon_{t+1} + \theta_1 \varepsilon_t) + \varepsilon_{t+2} + \theta_1 \varepsilon_{t+1}) - (\delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 y_t + \phi_1 \theta_1 \varepsilon_t))^2 \\
&= E((\delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 y_t + \phi_1 \varepsilon_{t+1} + \phi_1 \theta_1 \varepsilon_t + \varepsilon_{t+2} + \theta_1 \varepsilon_{t+1}) - (\delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 y_t + \phi_1 \theta_1 \varepsilon_t))^2 \\
&= E\left[\varepsilon_{t+2} + (\phi_1 + \theta_1)\varepsilon_{t+1}\right]^2 = \left[1 + (\phi_1 + \theta_1)^2\right]\sigma^2_\varepsilon
\end{aligned}$$

La prévision optimale pour un horizon $h = 3$ est

$$\begin{aligned}
y^*_{t+3|t} &= E_t\, y_{t+3} = E_t\,(\delta + \phi_1 y_{t+2} + \varepsilon_{t+3} + \theta_1 \varepsilon_{t+2}) = \delta + \phi_1 E_t\, y_{t+2} + 0 + 0 \\
&= \delta + \phi_1 E_t\,(\delta + \phi_1 y_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \theta_1 \varepsilon_{t+1}) = \delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 E_t\, y_{t+1} \\
&= \delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 E_t\,(\delta + \phi_1 y_t + \varepsilon_{t+1} + \theta_1 \varepsilon_t) \\
&= \delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 \delta + \phi_1^3 y_t + 0 + \phi_1^2 \theta_1 \varepsilon_t
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
&MSE(y^*_{t+3|t}) = E(y_{t+3} - y^*_{t+3|t})^2 \\
&= E((\delta + \phi_1 \underbrace{(\delta + \phi_1 y_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \theta_1 \varepsilon_{t+1})}_{y_{t+2}} + \varepsilon_{t+3} + \theta_1 \varepsilon_{t+2}) - (\delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 \delta + \phi_1^3 y_t + \phi_1^2 \theta_1 \varepsilon_t))^2 \\
&= E((\delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 y_{t+1} + \phi_1 \varepsilon_{t+2} + \phi_1 \theta_1 \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+3} + \theta_1 \varepsilon_{t+2}) - (\delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 \delta + \phi_1^3 y_t + \phi_1^2 \theta_1 \varepsilon_t))^2 \\
&= E((\delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 \underbrace{(\delta + \phi_1 y_t + \varepsilon_{t+1} + \theta_1 \varepsilon_t)}_{y_{t+1}} + \phi_1 \varepsilon_{t+2} + \phi_1 \theta_1 \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+3} + \theta_1 \varepsilon_{t+2}) \\
&\qquad\qquad - (\delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 \delta + \phi_1^3 y_t + \phi_1^2 \theta_1 \varepsilon_t))^2 \\
&= E((\delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 \delta + \phi_1^3 y_t + \phi_1^2 \varepsilon_{t+1} + \phi_1^2 \theta_1 \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t+2} + \phi_1 \theta_1 \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+3} + \theta_1 \varepsilon_{t+2}) \\
&\qquad\qquad - (\delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 \delta + \phi_1^3 y_t + \phi_1^2 \theta_1 \varepsilon_t))^2 \\
&= E(\phi_1^2 \varepsilon_{t+1} + \phi_1 \varepsilon_{t+2} + \phi_1 \theta_1 \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+3} + \theta_1 \varepsilon_{t+2})^2 = E\left[(\phi_1^2 + \phi_1 \theta_1)\varepsilon_{t+1} + (\phi_1 + \theta_1)\varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3}\right]^2 \\
&= \left[(\phi_1^2 + \phi_1 \theta_1)^2 + (\phi_1 + \theta_1)^2 + 1\right]\sigma^2_\varepsilon
\end{aligned}$$

Pour h en général amusez-vous! La prévision optimale pour un horizon h est

$$y^*_{t+h|t} = E_t\, y_{t+3} = \delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 \delta + \ldots + \phi_1^{h-1} \delta + \phi_1^h y_t + \phi_1^{h-1} \theta_1 \varepsilon_t$$

Q4-

a) Montrez que l'espérance non-conditionnelle $E(\varepsilon_t) = 0$

$$\begin{aligned}
E_{t-1}\varepsilon_t &= E_{t-1}\left(z_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}\right) \\
&= \underbrace{\left(\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}\right)}_{car\ connu\ en\ t-1} E_{t-1}(z_t) \\
&= \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi par récursion d'information

$$E_{t-2}\varepsilon_t = E_{t-2}(E_{t-1}\varepsilon_t) = E_{t-2}(0) = 0$$

$$E_{t-3}\varepsilon_t = E_{t-3}(E_{t-2}(E_{t-1}\varepsilon_t)) = E_{t-3}(E_{t-2}(0)) = E_{t-3}(0) = 0$$

…

$$E_{t-j}(\varepsilon_t) = E_{t-j}(E_{t-j+1}(...(E_{t-3}(E_{t-2}(E_{t-1}\varepsilon_t)))) = E_{t-j}(E_{t-j+1}(...(E_{t-3}(E_{t-2}(0)))) = E_{t-j}(0) = 0$$

On peut définir l'espérance non-conditionnelle comme étant l'espérance sans information, donc à l'origine lorsque $j \to \infty$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
E(\varepsilon_t) \equiv E(\varepsilon_t \mid \varnothing) \equiv \lim_{j\to\infty} E_{t-j}(\varepsilon_t) &= \lim_{j\to\infty} E_{t-j}(E_{t-j+1}(...(E_{t-3}(E_{t-2}(E_{t-1}\varepsilon_t)))) \\
&= \lim_{j\to\infty} E_{t-j}(E_{t-j+1}(...(E_{t-3}(E_{t-2}(0)))) = \lim_{j\to\infty} E_{t-j}(0) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi $E(\varepsilon_t) = 0$

b) la **variance conditionnelle** est définie par

$$\sigma_t^2 \equiv \mathrm{var}(\varepsilon_t \mid \Im_{t-1}) = E_{t-1}(\varepsilon_t - \underbrace{E_{t-1}(\varepsilon_t)}_{0})^2 = E_{t-1}\varepsilon_t^2 = E_{t-1}\left(z_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}\right)^2 = E_{t-1}z_t^2(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2)$$

$$= (\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2)\underbrace{E_{t-1}z_t^2}_{1}$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2$$

Le processus est conditionnellement hétéroscédastique.

c) la **variance non-conditionnelle** est définie par

$$\mathrm{var}(\varepsilon_t) \equiv \mathrm{var}(\varepsilon_t \mid \varnothing) \equiv \lim_{j\to\infty} \mathrm{var}_{t-j}(\varepsilon_t) = \lim_{j\to\infty} E_{t-j}(\varepsilon_t^2) = \lim_{j\to\infty} E_{t-j}(E_{t-j+1}(...(E_{t-3}(E_{t-2}(E_{t-1}\varepsilon_t^2))))$$

Ainsi commençons par $\mathrm{var}_{t-1}(\varepsilon_t) = E_{t-1}\varepsilon_t^2$ pour remonter jusqu'à $\mathrm{var}_{t-j}(\varepsilon_t) = E_{t-j}\varepsilon_t^2$ pour finalement prendre la

$\lim\limits_{j\to\infty} \mathrm{var}_{t-j}(\varepsilon_t)$.

$$\begin{aligned}\operatorname{var}_{t-2}(\varepsilon_t) &= E_{t-2}\varepsilon_t^2 = E_{t-2}\left(E_{t-1}\left(z_t\sqrt{\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}\right)^2\right) = E_{t-2}\left((\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2)\underbrace{E_{t-1}z_t^2}_{=1}\right)\\ &= E_{t-2}\left(\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2\right) = \alpha_0+\alpha_1\underbrace{E_{t-2}\varepsilon_{t-1}^2}_{=\sigma_{t-1}^2}\\ &= \alpha_0+\alpha_1(\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-2}^2)\\ &= \alpha_0+\alpha_1\alpha_0+\alpha_1^2\varepsilon_{t-2}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}_{t-3}(\varepsilon_t) &= E_{t-3}\varepsilon_t^2 = E_{t-3}\left[E_{t-2}\left(E_{t-1}\left(z_t\sqrt{\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}\right)^2\right)\right]\\ &= E_{t-3}\left(\alpha_0+\alpha_1\alpha_0+\alpha_1^2\varepsilon_{t-2}^2\right) = \alpha_0+\alpha_1\alpha_0+\alpha_1^2\underbrace{E_{t-3}\varepsilon_{t-2}^2}_{=\sigma_{t-2}^2}\\ &= \alpha_0+\alpha_1\alpha_0+\alpha_1^2(\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-3}^2)\\ &= \alpha_0+\alpha_1\alpha_0+\alpha_1^2\alpha_0+\alpha_1^3\varepsilon_{t-3}^2\end{aligned}$$

…

$$\begin{aligned}&\operatorname{var}_{t-j}(\varepsilon_t) = E_{t-j}\varepsilon_t^2 = E_{t-j}(E_{t-j+1}(...(E_{t-3}(E_{t-2}(E_{t-1}\varepsilon_t^2)))))\\ &= \alpha_0+\alpha_1\alpha_0+\alpha_1^2\alpha_0+...+\alpha_1^{j-1}\alpha_0+\alpha_1^j\varepsilon_{t-j}^2\\ &= \alpha_0\underbrace{(1+\alpha_1+\alpha_1^2+...+\alpha_1^{j-1})}_{=\frac{1}{1-\alpha_1}-\alpha_1^j\frac{1}{1-\alpha_1}}+\alpha_1^j\varepsilon_{t-j}^2\\ &= \alpha_0\left(\frac{1-\alpha_1^j}{1-\alpha_1}\right)+\alpha_1^j\varepsilon_{t-j}^2\end{aligned}$$

Ainsi pour la variance non-conditionnelle on a

$$\operatorname{var}(\varepsilon_t) \equiv \operatorname{var}(\varepsilon_t \mid \varnothing) \equiv \lim_{j\to\infty}\operatorname{var}_{t-j}(\varepsilon_t) = \lim_{j\to\infty}\left(\alpha_0\left(\frac{1-\alpha_1^j}{1-\alpha_1}\right)+\alpha_1^j\varepsilon_{t-j}^2\right) = \alpha_0\left(\frac{1}{1-\alpha_1}\right)$$

Le processus est non-conditionnellement homoscédastique.

d) Montrez que $E_{t-1}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = 0$

$$E_{t-1}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = \varepsilon_{t-1}\underbrace{E_{t-1}(\varepsilon_t)}_{=0} = 0$$