a) Calculez l'état stationnaire du capital mathématiquement à partir du modèle suivant :

$$
\begin{aligned}
Y_t &= A\sqrt{K_t} \\
C_t &= PmC \cdot Y_t \\
S_t &= I_t \\
I_t &= PmÉ \cdot Y_t \\
D_t &= \delta K_t \\
Inet_t &= I_t - D_t \\
K_{t+1} &= K_t + I_t - D_t
\end{aligned}
$$

Ici afin de simplifier la notation on suppose ici qu'il y a un seul travailleur qui reste constant (ou que les variables Y, C, I, D et K en majuscules sont déjà des niveaux de production, consommation, investissement, dépréciation et capital *par travailleur*).

b) Cas 1 : Illustrez la dynamique l'accumulation du capital avec le modèle ci-haut et les données suivantes :

Niveau technologique (niveau d'efficience): $A = 1$,
Taux d'épargne (et d'investissement. Propension marginale à épargner $PmÉ$) : $s = PmÉ = 0.3$,
Taux de consommation (Propension marginale à consommer PmC) : $(1 - s) = PmC = 0.7$,
Taux de dépréciation (d'amortissement) : $\delta = 0.1$

Calculez l'état stationnaire et illustrez le tout dans le graphique du plan Y, C, I, D et K.

c) Cas 2 : À partir du cas 1, illustrez l'effet d'une hausse du niveau technologique A qui devient 1.3333333…=(4/3).

d) Cas 3 : À partir du cas 1, illustrez l'effet d'une hausse de la propension marginale à consommer PmC qui devient 0.75.

e) Cas 4 : À partir du cas 1, illustrez l'effet d'une hausse du taux de dépréciation δ qui devient 12%.

Solutions
a) L'état stationnaire mathématiquement…

Pour trouver le niveau de capital (*par travailleur*) à l'état stationnaire on utilise l'équation d'accumulation du capital qui guide la dynamique d'évolution du capital de période en période suivante:

$$K_{t+1} = K_t + \underbrace{I_t - D_t}_{Inet_t}$$

Pour la dépréciation D_t (qui est une fraction du niveau de capital en t) on a $D_t = \delta K_t$. En substituant dans l'équation ci-haut on obtient l'équation d'accumulation du capital suivante :

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= K_t + I_t - \delta K_t \\ &= K_t - \delta K_t + I_t \\ &= (1-\delta)K_t + I_t \end{aligned}$$

Dans notre modèle d'économie fermée on se rappelle que l'investissement est égal à l'épargne : $I_t = S_t$. Ainsi l'investissement sera une fraction (la propension marginale à épargner) de la production telle que:

$$I_t = Pm\acute{E} \cdot Y_t = Pm\acute{E} \cdot A\sqrt{K_t}$$

Se faisant l'évolution du capital est guidée par:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + \underbrace{Pm\acute{E} \cdot A\sqrt{K_t}}_{I_t}$$

On cherche à trouver l'état stationnaire du capital, celui-ci est défini par la stabilité du stock de capital dans le temps. Ainsi d'une période à une autre le stock de capital à l'état stationnaire est stable et est égal à K^*. C'est-à-dire que K_{t+j} est égal à K^* à toutes les périodes dans le temps lorsque l'on a atteint l'état stationnaire et qu'il n'y a pas d'autre choc (ceteris paribus). En fixant $K_{t+1} = K^*$ et $K_t = K^*$ dans l'équation d'accumulation du capital $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + Pm\acute{E} \cdot A\sqrt{K_t}$ on obtient:

$$K^* = (1-\delta)K^* + Pm\acute{E} \cdot A\sqrt{K^*}$$

On peut réécrire cette expression de la manière suivante :

$$\delta K^* = Pm\acute{E} \cdot A\sqrt{K^*}$$

Afin de trouver la valeur du stock de capital à l'état stationnaire il ne reste qu'à trouver K^*. On a une fonction mathématique en K^* et il faut simplement isoler K^*; pour ce faire on utilisera les règles des exposants[1].

$$\begin{aligned} \delta K^* &= Pm\acute{E} \cdot A\sqrt{K^*} \\ K^* &= \left(\frac{Pm\acute{E} \cdot A}{\delta}\right)\sqrt{K^*} \end{aligned}$$

---

[1] Notez que l'on pourrait aussi résoudre la forme quadratique suivante $\delta^2 \left(K^*\right)^2 - Pm\acute{E}^2 \cdot A^2 K^* = 0$ pour trouver l'état stationnaire du capital.

$$\frac{K^*}{\sqrt{K^*}} = \left(\frac{Pm\acute{E} \cdot A}{\delta}\right)$$

$$\frac{K^*}{K^{*1/2}} = \left(\frac{Pm\acute{E} \cdot A}{\delta}\right)$$

$$K^{*1-(1/2)} = \left(\frac{Pm\acute{E} \cdot A}{\delta}\right)$$

$$K^{*(1/2)} = \left(\frac{Pm\acute{E} \cdot A}{\delta}\right)$$

$$K^* = \left(\frac{Pm\acute{E} \cdot A}{\delta}\right)^2$$

La formule ‘’magique’’ qui donne le niveau de capital à l’état stationnaire est donc : $K^* = \left(\frac{Pm\acute{E} \cdot A}{\delta}\right)^2$.

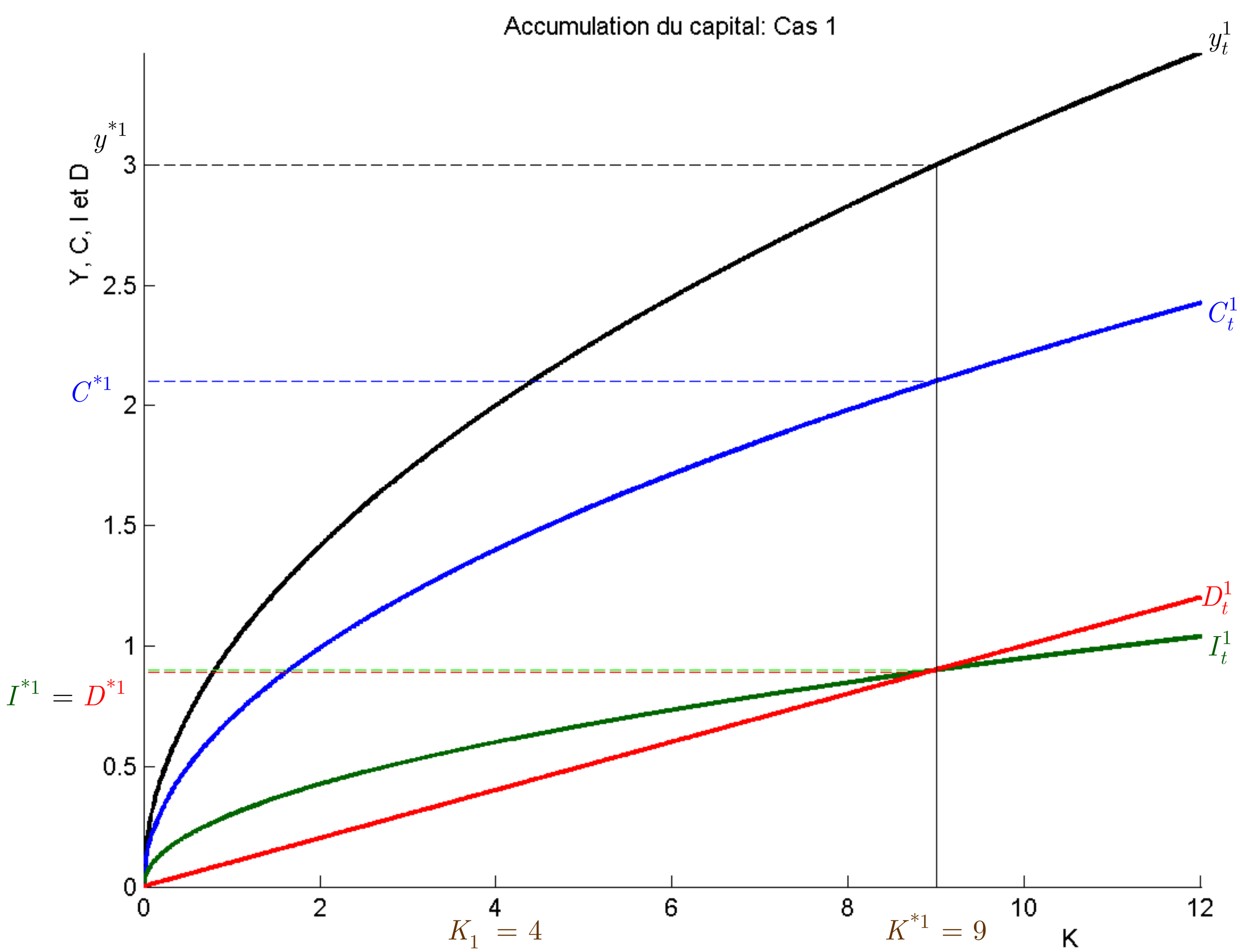
Si $A = 1$, alors on a simplement $K^* = \left(\frac{Pm\acute{E}}{\delta}\right)^2$

b) Cas 1 (cas de référence)

$A = 1, \quad PmC = 0.7, \quad PmÉ = 0.3, \quad \delta = 0.1 \qquad K^{*1} = \left(\frac{PmÉ \cdot A}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{0.3 \cdot 1}{0.1}\right)^2 = \left(\frac{0.3}{0.1}\right)^2 = 3^2 = 9$.

Avec un niveau initial de capital de départ à $K_1 = 4$, on peut compléter le tableau suivant…

t	K_t	$Y_t = A\sqrt{K_t}$	$C_t = PmC \cdot Y_t$	$I_t = PmÉ \cdot Y_t$	$D_t = \delta K_t$	$Inet_t = I_t - D_t$
1	4	2	1.4	0.6	0.4	0.2
2	4.2	2.04939	1.434573	0.614817	0.42	0.194817
3	4.394817	2.096382	1.467467	0.628915	0.439482	0.189433
4	4.58425	2.141086	1.49876	0.642326	0.458425	0.183901
5	4.768151	2.18361	1.528527	0.655083	0.476815	0.178268
6	4.946419	2.224055	1.556838	0.667216	0.494642	0.172575
	…	…	…	…	…	…
∞	9	3	2.1	0.9	0.9	0



c) Cas 2 : Un choc technologique

Si le niveau technologique A augmente de 1 à (4/3)=1.33333333… la fonction de production passe de

$Y_t = 1\sqrt{K_t}$ à $Y_t = \left(\frac{4}{3}\right)\sqrt{K_t}$

$A = (4/3), \quad PmC = 0.7, \quad Pm\acute{E} = 0.3, \quad \delta = 0.1$

Alors à l'état stationnaire le stock de capital est donné par:

$$K^{*2} = \left(\frac{Pm\acute{E} \cdot A}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{0.3 \cdot (4/3)}{0.1}\right)^2 = \left(\frac{0.4}{0.1}\right)^2 = 4^2 = 16\,.$$

Avec un niveau initial de capital de départ $K_1 = 4$, on peut compléter le tableau suivant…

t	K_t	$Y_t = A\sqrt{K_t}$	$C_t = PmC \cdot Y_t$	$I_t = Pm\acute{E} \cdot Y_t$	$D_t = \delta K_t$	$Inet_t = I_t - D_t$
1	4	2.666667	1.866667	0.8	0.4	0.4
2	4.4	2.796824	1.957777	0.839047	0.44	0.399047
3	4.799047	2.920897	2.044628	0.876269	0.479905	0.396364
4	5.195411	3.039126	2.127388	0.911738	0.519541	0.392197
5	5.587608	3.15175	2.206225	0.945525	0.558761	0.386764
6	5.974372	3.259004	2.281303	0.977701	0.597437	0.380264
	...	...	...	...	...	...
∞	16	5.333333	3.733333	1.6	1.6	0

Ainsi à l'état stationnaire dans le cas 2 par rapport au cas 1 on a:

$K^{*2} = 16 > K^{*1} = 9$

$Y^{*2} = 5.3333... > Y^{*1} = 3$

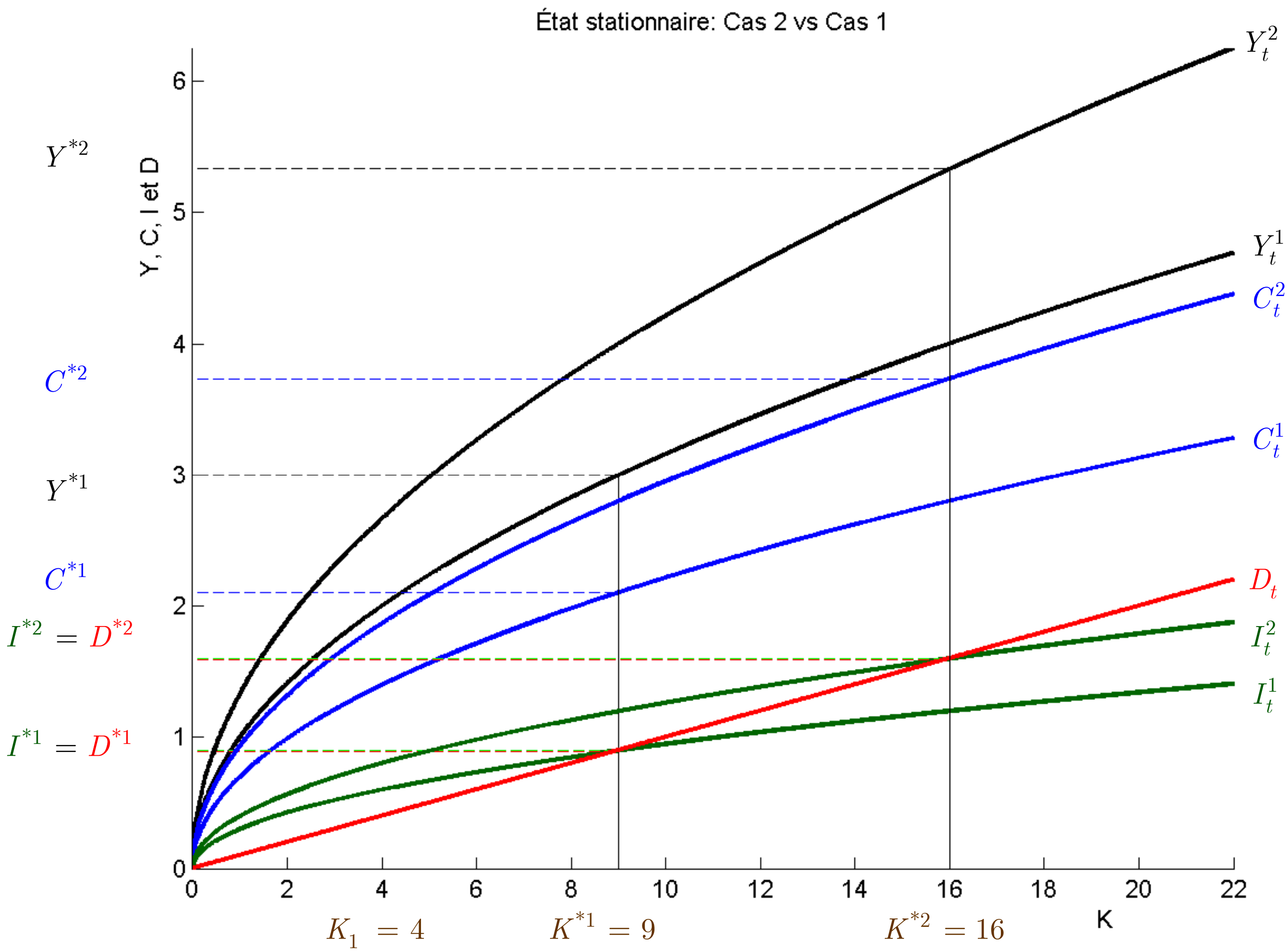
$C^{*2} = 3.7333... > C^{*1} = 2.1$

$I^{*2} = 1.6 > I^{*1} = 0.9$

$D^{*2} = 1.6 > D^{*1} = 0.9$

$Inet^{*} = I^{*} - D^{*} = 0$

Choc technologique



d) Cas 3 : Hausse de la propension marginale à consommer

$A = 1,\quad PmC = 0.75,\quad PmÉ = 0.25,\quad \delta = 0.1$

$$K^{*3} = \left(\frac{PmÉ \cdot A}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{0.25 \cdot 1}{0.1}\right)^2 = \left(\frac{0.25}{0.1}\right)^2 = 2.5^2 = 6.25$$

t	K_t	$Y_t = A\sqrt{K_t}$	$C_t = PmC \cdot Y_t$	$I_t = PmÉ \cdot Y_t$	$D_t = \delta K_t$	$Inet_t = I_t - D_t$
1	4	2	1.5	0.5	0.4	0.1
2	4.1	2.024846	1.518634	0.506211	0.41	0.096211
3	4.196211	2.048466	1.536349	0.512116	0.419621	0.092495
4	4.288707	2.070919	1.553189	0.51773	0.428871	0.088859
5	4.377566	2.092263	1.569197	0.523066	0.437757	0.085309
6	4.462875	2.112552	1.584414	0.528138	0.446288	0.08185
	...	...	...	...	...	...
∞	6.25	2.5	1.875	0.625	0.625	0

$K^{*3} = 6.25 < K^{*1} = 9$

$Y^{*3} = 2.5 < Y^{*1} = 3$

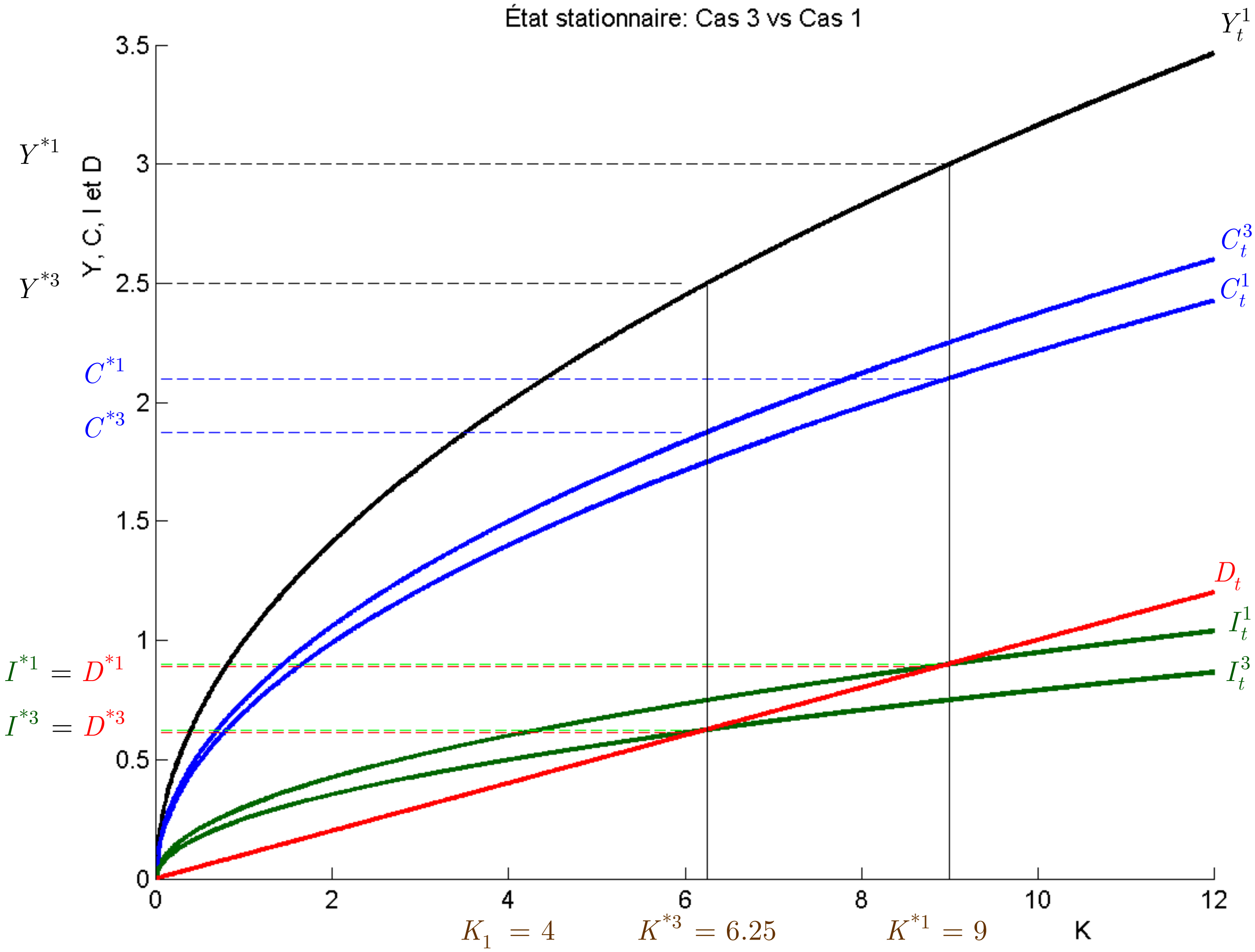
$C^{*3} = 1.875 < C^{*1} = 2.1$

$I^{*3} = 0.625 < I^{*1} = 0.9$

$D^{*3} = 0.625 < D^{*1} = 0.9$

$Inet^{*} = I^{*} - D^{*} = 0$

Hausse de la propension marginale à consommer



e) Cas 4 : Hausse du taux de dépréciation

$$A = 1, \quad PmC = 0.7, \quad Pm\acute{E} = 0.3, \quad \delta = 0.12$$

$$K^{*4} = \left(\frac{Pm\acute{E} \cdot A}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{0.3 \cdot 1}{0.12}\right)^2 = \left(\frac{0.3}{0.12}\right)^2 = 2.5^2 = 6.25$$

t	K_t	$Y_t = A\sqrt{K_t}$	$C_t = PmC \cdot Y_t$	$I_t = Pm\acute{E} \cdot Y_t$	$D_t = \delta K_t$	$Inet_t = I_t - D_t$
1	4	2	1.4	0.6	0.48	0.12
2	4.12	2.029778	1.420845	0.608933	0.4944	0.114533
3	4.234533	2.057798	1.440459	0.617339	0.508144	0.109195
4	4.343729	2.084161	1.458913	0.625248	0.521247	0.104001
5	4.44773	2.108964	1.476275	0.632689	0.533728	0.098962
6	4.546692	2.132297	1.492608	0.639689	0.545603	0.094086
	...	...	...	...	...	...
∞	6.25	2.5	1.75	0.75	0.75	0

$$K^{*4} = 6.25 < K^{*1} = 9$$

$$Y^{*4} = 2.5 < Y^{*1} = 3$$

$$C^{*4} = 1.75 < C^{*1} = 2.1$$

$$I^{*4} = 0.75 < I^{*1} = 0.9$$

$$D^{*4} = 0.75 < D^{*1} = 0.9$$

$$Inet^{*} = I^{*} - D^{*} = 0$$

Hausse du taux de dépréciation