En partant d'une variable à une période de départ 0 par exemple X_0 nous pouvons construire la suite (séquence) de variables $\{X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots\}$ dans le temps en cumulant la croissance de la variable en appliquant les divers taux de croissance aux variables appropriées selon les périodes de temps correspondantes de la manière suivante.

$$X_1 = (1+g_1)X_0$$
$$X_2 = (1+g_2)X_1 = (1+g_2)\underbrace{(1+g_1)X_0}_{X_1}$$
$$X_3 = (1+g_3)X_2 = (1+g_3)\underbrace{(1+g_2)(1+g_1)X_0}_{X_2}$$
$$X_4 = (1+g_4)X_3 = (1+g_4)\underbrace{(1+g_3)(1+g_2)(1+g_1)X_0}_{X_3}$$
$$X_n = (1+g_n)(1+g_{n-1})\cdots(1+g_2)(1+g_1)X_0 = \left(\underbrace{\prod_{i=1}^{n}(1+g_i)}_{notation\ produit}\right)X_0 = \left(\prod_{i=j+1}^{n}(1+g_i)\right)X_j$$

Exemple

Si $X_0 = 100$ et que l'on a les taux suivants en décimales : $g_1 = 0.10,\ g_2 = 0.20\ et\ g_3 = 0.30$ alors

$$X_1 = (1+0.10)100 = 110$$
$$X_2 = (1+0.20)110 = (1+0.20)\underbrace{(1+0.10)100}_{X_1} = 132$$
$$X_3 = (1+0.30)132 = (1+0.30)\underbrace{(1+0.20)(1+0.10)100}_{X_2} = 171.6$$
$$X_3 = \left(\prod_{i=0+1}^{n}(1+g_i)\right)X_0 = (1+g_3)(1+g_2)(1+g_1)X_0$$

Si le taux de croissance est identique g de période en période on a la formule simplifiée suivante :

$X_n = (1+g)^n X_0$ qui vient de

$$X_1 = (1+g)X_0$$
$$X_2 = (1+g)X_1 = (1+g)\underbrace{(1+g)X_0}_{X_1}$$
$$X_3 = (1+g)X_2 = (1+g)\underbrace{(1+g)(1+g)X_0}_{X_2}$$
$$X_4 = (1+g)X_3 = (1+g)\underbrace{(1+g)(1+g)(1+g)X_0}_{X_3}$$
$$X_n = \underbrace{(1+g)(1+g)\cdots(1+g)(1+g)}_{n\ fois}X_0 = (1+g)^n X_0 = \left(\prod_{i=1}^{n}(1+g)\right)X_0 = \left(\prod_{i=j+1}^{n}(1+g)\right)X_j$$

Les divers taux de croissance

2- Taux de croissance simple (sur une période)

Avec toute variable X_t , le taux de croissance (simple, de base, standard, pas en moyenne) exprimé en décimale entre la donnée X_{t-1} et X_t se calcule avec la formule suivante :

$$g_t = \left(\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \right) = \left(\frac{X_t}{X_{t-1}} \right) - 1$$

Si on veut avoir un taux en % on multiplie par 100.

Exemple

$$X_t = 220 \ et \ X_{t-1} = 200$$
$$g_t = \left(\frac{220 - 200}{200} \right) = \frac{20}{200} = 0.10 = \left(\frac{X_t}{X_{t-1}} \right) - 1 = \left(\frac{220}{200} \right) - 1 = 1.1 - 1 = 0.10 = 10\%$$

3- Taux de croissance simple sur n périodes

Le taux de croissance **sur n périodes** exprimé en décimale entre la donnée X_{t-n} (n périodes dans le passé) et X_t se calcule avec la formule suivante :

$$g_{t \ sur \ n \ p\acute{e}riodes} = \left(\frac{X_t - X_{t-n}}{X_{t-n}} \right) = \left(\frac{X_t}{X_{t-n}} \right) - 1$$

Si on veut avoir un taux en % on multiplie par 100.

Exemple

$$X_t = 220 \ et \ X_{t-2} = 160$$
$$g_{t \ sur \ 2 \ p\acute{e}riodes} = \left(\frac{220 - 160}{160} \right) = \frac{60}{160} = 0.375 = \left(\frac{X_t}{X_{t-1}} \right) - 1 = \left(\frac{220}{160} \right) - 1 = 1.375 - 1 = 0.375 = 37.5\%$$

4- Taux de croissance moyen (sur n périodes)

Avec toute variable X_t , le taux de **croissance moyen** (avec une moyenne géométrique) exprimé en décimale entre la donnée X_{t-n} (n périodes dans le passé) et X_t se calcule avec la formule suivante :

$$g_{moyen\ sur\ n\ périodes} = \left(\frac{X_t}{X_{t-n}}\right)^{(1/n)} - 1 \qquad \text{ou} \qquad g_{moyen} = \left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{1/n} - 1$$

Si on veut avoir un taux en % on multiplie par 100.

Ce taux de **croissance moyen** correspond au taux identique (constant) que l'on aurait pendant n périodes qui nous donnerait la même croissance finale que celle observée durant les n périodes différentes.

Démonstration pour trouver le taux de croissance moyen g_{moyen}

Si on veux savoir quel taux moyen g_{moyen} on a besoin pour obtenir la valeur X_n à la période n à partir d'une valeur X_0 à la période 0 si la croissance moyenne s'applique pendant n périodes, on utilise la formule suivante :

$$g_{moyen} = \left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{1/n} - 1$$

Démonstration : À partir de

$$X_n = X_0(1+g_{moyen})^n$$

$$\frac{X_n}{X_0} = \frac{X_0(1+g_{moyen})^n}{X_0}$$

$$\left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{1/n} = \left((1+g_{moyen})^n\right)^{1/n} \quad puisque\ \left(x^a\right)^{1/b} = x^{a/b}$$

$$\left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{1/n} = (1+g_{moyen})^{n/n} = 1+g$$

$$g_{moyen} = \left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{1/n} - 1$$

Exemple numérique :

$$X_t = 220\ et\ X_{t-2} = 160$$

$$g_{moyen\ sur\ 2\ périodes} = \left(\frac{X_t}{X_{t-2}}\right)^{(1/2)} - 1 = \left(\frac{220}{160}\right)^{(1/2)} - 1 = 1.375^{(1/2)} - 1 = 1.1726... - 1 = 0.1726... = 17.26\%$$

Cas particulier : Taux de croissance (annuels) moyens :

C'est une application du **Taux de croissance moyen (sur n périodes)** avec des données annuelles.

Le taux de croissance moyen pour des quantités annuelles A_t séparées par *n* années a pour but de nous donner la croissance moyenne (calculée de manière géométrique et non arithmétique, pour tenir compte de la capitalisation) observée sur plusieurs années.

Ce dernier est donné par :

$$g_{moyen\ sur\ n\ années} = \left(\frac{A_t}{A_{t-n}}\right)^{(1/n)} - 1$$

Si on veut avoir un taux en % on multiplie par 100.

Ex. $g_{\substack{moyen\ de\ la\ Dette \\ entre\ 2005\ et\ 2008}} = \left(\frac{Dette_{2008}}{Dette_{2005}}\right)^{1/3} - 1$

5- Trouver le nombre de périodes n

Si on veut savoir le nombre de périodes n qu'il faut pour obtenir la valeur X_n à la période n à partir d'une valeur X_0 à la période 0 si on a un taux de croissance identique g à toutes les périodes (équivalent au taux moyen), on utilise la formule suivante :

$$n = \frac{\ln(X_n \,/\, X_0)}{\ln(1+g)} \quad \text{où } g \equiv g_{moyen}$$

Démonstration : À partir de

$$X_n = X_0 (1+g)^n$$

$$\frac{X_n}{X_0} = \frac{X_0 (1+g)^n}{X_0}$$

$$\ln\left(\frac{X_n}{X_0}\right) = \ln(1+g)^n$$

$$\ln\left(\frac{X_n}{X_0}\right) = n \ln(1+g) \qquad \text{car } \ln x^a = a \ln x$$

$$n = \frac{\ln\left(X_n \,/\, X_0\right)}{\ln(1+g)} = \frac{(\ln(X_n) - \ln(X_0))}{\ln(1+g)}$$

6-Taux en glissement annuel ou taux année sur année (year over year ou year to year en anglais): le fait de calculer un taux de croissance en glissement annuel a pour effet de lisser les fluctuations de court terme afin de comparer les fluctuations par rapport à une base annuelle. Malheureusement ce taux ne mesure pas que les fluctuations récentes mais bien l'écart par rapport à la même période (trimestre ou mois) il y a un an, ainsi le passé peut avoir une incidence importante sur la valeur obtenue. C'est en fait un taux de croissance calculé sur n périodes à partir de données à plus courte fréquence (mensuelle, trimestrielles, quotidienne,…) où le nombre de périodes correspond à un an.

6a) Taux en glissement annuel à partir de données trimestrielles

À partir de données trimestrielles notées Q_t (pour quarter en anglais) on utilise la formule suivante:

$$g_{t\ en\ glissement\ annuel} = \left(\frac{Q_t - Q_{t-4}}{Q_{t-4}} \right)$$

Si on veut avoir des taux en % on multiplie par 100.

6b) Taux en glissement annuel à partir de données mensuelles

À partir de données mensuelles notées M_t on utilise la formule suivante:

$$g_{t\ en\ glissement\ annuel} = \left(\frac{M_t - M_{t-12}}{M_{t-12}} \right)$$

Si on veut avoir des taux en % on multiplie par 100.

Exemple : Le taux d'inflation calculé à partir de l'IPC est en fait un taux en glissement annuel obtenu à partir de données mensuelles de l'IPC.

$$\pi_{t\ en\ glissement\ annuel} = \left(\frac{IPC_t - IPC_{t-12}}{IPC_{t-12}} \right)$$

$$\pi_{\text{décembre 2013}\ en\ glissement\ annuel} = \left(\frac{IPC_{déc2013} - IPC_{déc2012}}{IPC_{déc2012}} \right) = \left(\frac{122.7 - 121.2}{121.2} \right) = 0.012376...=1.24\%$$

Notez que ce taux est un taux entre décembre 2012 et décembre 2013. De plus, le calcul est basé sur l'IPC avec juin 2002 comme date de base (de référence).

7-Les taux de croissance annualisés

Annualiser un taux : Ajuster un taux de croissance (trimestriel ou mensuel) afin de refléter le changement « fictif » que l'on observerait sur la valeur d'une variable si la variable avait crû au rythme observé ponctuellement pendant toute l'année.

Le fait d'annualiser des taux de croissance a pour effet d'amplifier les fluctuations de court terme afin de comparer le choc actuel par rapport à une base annuelle.

7a) Le taux de croissance trimestriel annualisé pour des quantités Q_t séparées par un trimestre (3 mois) est donné par :

$$g_{t\ trimestriel\ annualisé} = \left(\frac{Q_t}{Q_{t-1}}\right)^4 - 1$$ *(fois 100 pour avoir des %)*

Exemple :

Pour le **taux de croissance trimestriel annualisé** du PIB réel (en $ constants de 2007) entre la donnée du 3-ième trimestre de 2013 et celle du 2-ième trimestre de 2013 on a :

$$g_{\text{2013:Q3}\ trimestriel\ annualisé} = \left(\frac{Q_{2013:Q3}}{Q_{2013:Q2}}\right)^4 - 1 = \left(\frac{1\ 682\ 392\ 000\ 000}{1\ 671\ 740\ 000\ 000}\right)^4 - 1 = (1.0063718...)^4 - 1$$
$$= 1.02573... - 1 = 0.02573... = 2.57\%$$

Par *comparaison* le **taux de croissance trimestriel simple** du troisième trimestre de 2013 serait donné par :

$$g_{\text{2013:Q3}\ trimestriel} = \left(\frac{Q_{2013:Q3}}{Q_{2013:Q2}}\right) - 1 = \left(\frac{1\ 682\ 392\ 000\ 000}{1\ 671\ 740\ 000\ 000}\right) - 1 = 1.0063718... - 1 = 0.0063718 = 0.637\%$$

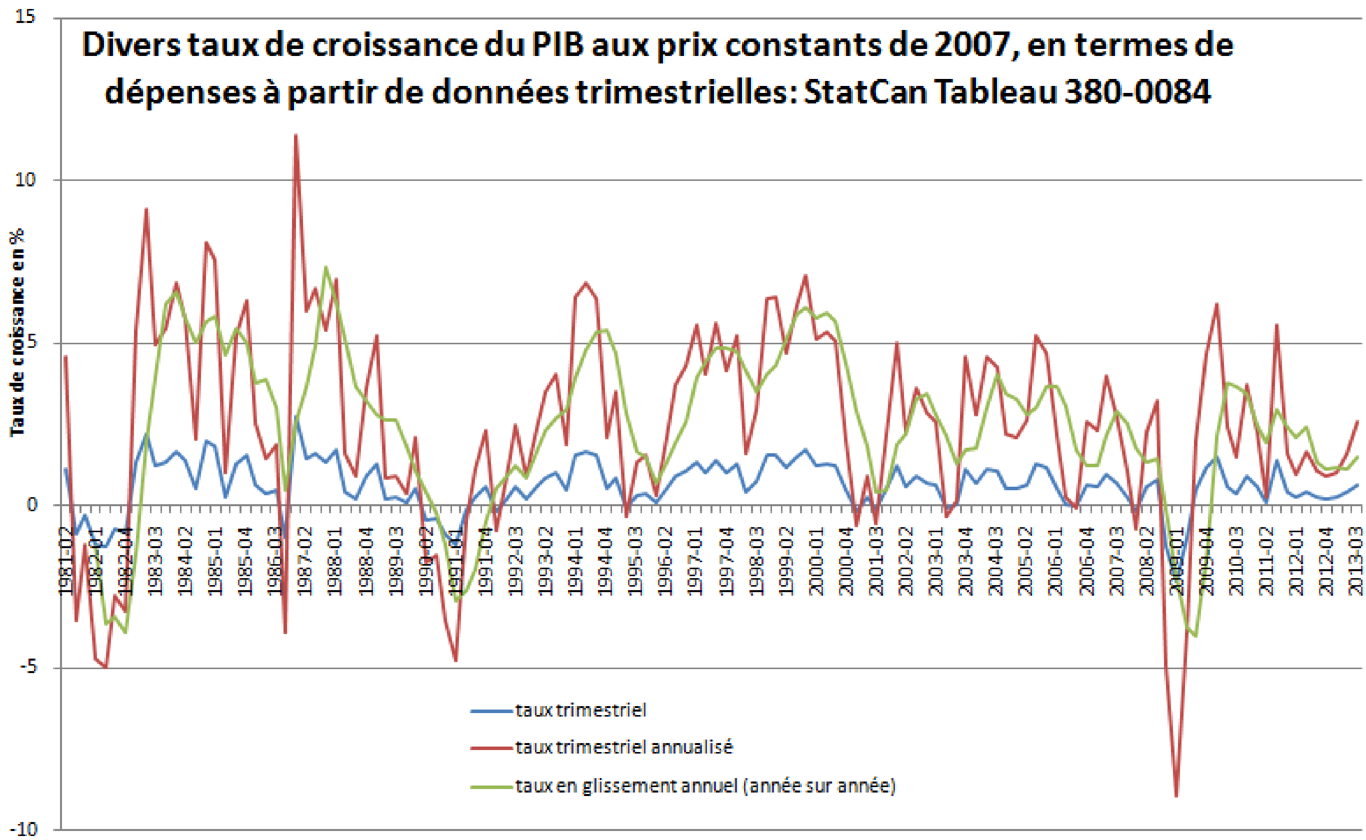
Par ailleurs, le taux en glissement annuel serait

$$g_{\text{en glissement annuel 2013:Q3}\ sur\ \text{2012:Q3}} = \left(\frac{Q_{2013:Q3}}{Q_{2012:Q3}}\right) - 1 = \left(\frac{1\ 682\ 392\ 000\ 000}{1\ 657\ 212\ 000\ 000}\right) - 1 = 1.001519... - 1 = 0.01519...$$
$$= 1.519\%$$

Ces trois taux sont présentés dans le graphique de la page suivante pour la dernière donnée.

Voir le graphique à la page suivante…

Taux de croissance en % du PIB réel en $ constants de 2007 (Produit intérieur brut en termes de dépenses aux prix du marché, ajustement)



dates	PIB réel (en Millions de $)
2011-03	1635416
2011-04	1642056
2012-01	1645980
2012-02	1652788
2012-03	1657212
2012-04	1660848
2013-01	1664996
2013-02	1671740
2013-03	1682392

Source : Statistique Canada. *Tableau380-0084 - Produit intérieur brut aux prix constants de 2007, en termes de dépenses, trimestriel (dollars),* CANSIM (base de données). (site consulté : 2014-01-30)http://www5.statcan.gc.ca/cansim/a26?id=3800084&pattern=GDP&p2=-1&p1=1&tabMode=dataTable&retrLang=fra&srchLan=-1&lang=fra

7b) Le taux de croissance mensuel annualisé pour des quantités M_t séparées par un mois est donné par :

$$g_{t \ mensuel \ annualisé} = \left(\frac{M_t}{M_{t-1}}\right)^{12} - 1$$ *(fois 100 pour avoir des %*

8 -Conversion de taux

8.1-Pour convertir un taux trimestriel en taux trimestriel annualisé et vice-versa on a les relations suivantes :

$$(1+g_{trimestriel})^4 = (1+g_{trimestriel \ annualisé})$$
$$g_{trimestriel \ annualisé} = (1+g_{trimestriel})^4 - 1$$
$$g_{trimestriel} = (1+g_{trimestriel \ annualisé})^{(1/4)} - 1$$

Ex. Si on a un taux de croissance trimestriel annualisé de 4%, quel est le taux trimestriel (non-annualisé) correspondant?

$$g_{trimestriel \ annualisé} = 0,04$$

$$g_{trimestriel} = (1+0,04)^{(1/4)} - 1 = 1{,}00985340... - 1 = 0,00985340... \approx 0{,}985\%$$

8.2-Pour convertir un taux mensuel en taux mensuel annualisé et vice-versa on a les relations suivantes

$$(1+g_{mensuel})^{12} = (1+g_{mensuel \ annualisé})$$
$$g_{mensuel \ annualisé} = (1+g_{mensuel})^{12} - 1$$
$$g_{mensuel} = (1+g_{mensuel \ annualisé})^{(1/12)} - 1$$

Ex. Si on a un taux de croissance mensuel (non-annualisé) de 1%, quel est le taux mensuel annualisé correspondant?

$$g_{mensuel} = 0,01$$
$$g_{mensuel \ annualisé} = (1+0,01)^{12} - 1 = 1{,}1268250... - 1 = 0{,}1268250... \approx 12{,}68\%$$

8.3- Le taux d'intérêt quotidien (pour un jour):

$$i_{quotidien} = \left(1 + i_{annuel}\right)^{(1/365)} - 1$$

$$ex. \text{ taux directeur}$$
$$i^{TD}_{quotidien} = \left(1 + 0.01\right)^{(1/365)} - 1 = 0.00002726155 = 0.002726155 \ \% \ par \ jour$$